PARADOXUL LUI FITCH ÎN LOGICA TEMPORALĂ A ANUNȚURILOR PUBLICE ARBITRARE

ALEXANDRU DRAGOMIR

1. O SCURTĂ INTRODUCERE ÎN LOGICA EPISTEMICĂ

1.1. Limbajul logicii epistemice

Limbajul logicii epistemice conține limbajul logicii propoziționale. Cu alte cuvinte, orice este propoziție sau formulă bine formată (*fbf*) a limbajului logicii propoziționale, este *fbf* și în limbajul logicii epistemice. Mai mult, *fbf* vor fi și cele de forma $K_a\phi$ (*agentul a știe că* ϕ) unde ϕ este o *fbf*, iar *a* este numele unui agent epistemic dintr-o mulțime *Ag*. Dată fiind o mulțime infinită și numărabilă *At* de atomi propoziționali ai limbajului și o mulțime *Ag* de agenți, forma Backus-Naur care redă construcția inductivă a limbajului logicii epistemice (L_{EL}) este următoarea:

$$\phi ::= p \mid \top \mid \neg\phi \mid \phi \,\&\, \psi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \rightarrow \psi \mid K_a\,\phi$$

1.2. Axiomatica logicii epistemice

Cel mai cunoscut sistem axiomatic pentru logica epistemică este sistemul S5 pentru logica modală.[1] În această subsecțiune vom trece în revistă axiomele acestui sistem.[2]

1. Toate tautologiile logicii propoziționale
2. Axioma K: $K_a(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_a\phi \rightarrow K_a\psi)$

Axioma K este citită astfel: dacă un agent *a* știe că: dacă ϕ, atunci ψ, atunci, dacă știe că ϕ, atunci știe că ψ. Virtuțile acesteia sunt metateoretice, ea făcând posibilă oferirea unei semantici pentru logica epistemică în termenii modelelor Kripke (așa cum vom vedea în subsecțiunea următoare).

3. Axioma T: $K_a\phi \rightarrow \phi$

[1] Folosirea sistemul S5 ca sistem de logică epistemică este contestată: spre exemplu, J. Hintikka (v. Hintikka 1962) susține că sistemul S4 este cel care reflectă adecvat intuițiile noastre cu privire la logica noțiunii de cunoaștere propozițională.

[2] Indicații bibliografice: Fagin *et al*. 1995, Blackburn et al. 2002, van Ditmarsch *et al*. 2006.

Axioma T dă operatorului epistemic K o proprietate ce diferențiază cunoașterea propozițională de opinie, și anume proprietatea *veridicității*: deși putem avea opinii false, ceea ce știm este adevărat.

4. Axioma 4 sau a *introspecției pozitive*: $K_a\phi \rightarrow K_aK_a\phi$

Axioma introspecției pozitive este citită astfel: dacă un agent știe că ϕ, atunci el știe că știe că ϕ.

5. Axioma 5 sau a *introspecției negative*: $\neg K_a\phi \rightarrow K_a\neg K_a\phi$

Axioma introspecției negative este citită astfel: dacă un agent nu știe că ϕ, atunci el știe că nu știe că ϕ.

Reguli de deducție:

1. Modus Ponens: Dacă $\vdash \phi$ și $\vdash \phi \rightarrow \psi$, atunci $\vdash \psi$
2. Dacă $\vdash \phi$, atunci $\vdash K_a\phi$

1.3. Semantica logicii epistemice

În această subsecțiune vom prezenta semantica logicii epistemice folosind modelele Kripke. Prezentarea va fi bazată pe van Ditmarsch et al. 2006, Fagin et al. 1995, Blackburn et al. 2002.

Cel mai des folosit aparat semantic pentru formulele L_{EL} este cel al modelelor Kripke. Formal, un model Kripke este o structură $M=(W, \{R_a\}_{a\in Ag}, V)$, unde W este o mulțime de lumi posibile, fiecare $R_a \subseteq W \times W$ este o relație de echivalență între lumile posibile ale domeniului W (numită *relație de accesibilitate*), iar $V: At \rightarrow 2^W$ este o funcție ce asignează fiecărui atom propozițional al limbajului o mulțime de lumi posibile din domeniul W.[3] Formulele L_{EL} vor fi evaluate relativ la lumile posibile ale mulțimii W. Spre exemplu, o formulă propozițională atomară va fi interpretată astfel: relativ la lumea posibilă w, în modelul Kripke M, formula p este adevărată ddacă[4] atomului p i-a fost asignată o mulțime de lumi posibile căreia îi aparține și lumea w. Formal:

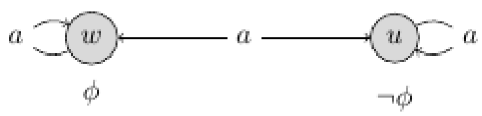
$$M, w \models p \text{ ddacă } w \in V(p)$$

O conjuncție de tipul $\phi \,\&\, \psi$ va fi evaluată astfel: relativ la lumea posibilă w, în modelul Kripke M, formula $\phi \,\&\, \psi$ este adevărată ddacă în același model, în lumea w, este adevărat că ϕ și este adevărat și că ψ. Formal:

[3] Am notat prin 2^W mulțimea putere a domeniului W, adică mulțimea tuturor submulțimilor lui W.
[4] *Dacă și numai dacă.*

$M, w \vDash \phi \,\&\, \psi$ ddacă $M, w \vDash \phi$ și $M, w \vDash \psi$

Cum sunt interpretate formulele de tipul $K_a\phi$ (*a știe că* ϕ)? Intuiția din spatele interpretării acestui tip de formule este următoarea: a ști că ϕ înseamnă a nu fi incert cu privire la adevărul lui ϕ. Dar ce înseamnă a nu fi incert cu privire la adevărul lui ϕ? Intuitiv, a nu fi incert cu privire la adevărul lui ϕ înseamnă a nu considera posibilă falsitatea lui ϕ. Să vedem cum aparatul lumilor posibile face ușor de reprezentat formal această intuiție cu privire la ce înseamnă a ști că ϕ. Să presupunem că înțelesul lui ϕ este *în acest moment plouă în București* (deci $\neg\phi$ va însemna *în acest moment nu plouă în București*), iar *a* este un agent epistemic. Să presupunem că lumea actuală (starea *de facto* de lucruri) este *w* și că, *de facto*, plouă în București, deci în lumea actuală, *w*, este adevărat că ϕ. Formal, avem: $w \in V(\phi)$. Să presupunem că există o lume posibilă, *u*, în care în acest moment nu plouă în București, deci relativ la *u* este fals că ϕ. Formal, $u \notin V(\phi)$. Faptul că *a* nu știe că ϕ este reprezentat astfel: deși relativ la lumea actuală, *w*, este adevărat că ϕ, agentul *a* consideră că lumea *u*, în care este fals că ϕ, este un candidat la statutul de lume actuală sau, cu alte cuvinte, crede că lumea în care este este fals că ϕ ar putea fi lumea actuală. Formal, această intuiție este tradusă fixând relația de accesibilitate în așa fel încât lumea *w* să fie legată prin relația R_a de lumea *u*: wR_au (sau $(w,u) \in R_a$). Bineînțeles, deoarece relațiile de accesibilitate sunt relații de echivalență, vom avea și uR_aw, wR_aw și uR_au. În figura de mai jos este reprezentat modelul Kripke care surprinde incertitudinea lui *a* cu privire la adevărul lui ϕ:



Având în vedere explicațiile de mai sus, agentul *a* știe că ϕ ddacă în niciuna din lumile pe care le consideră posibile nu este fals că ϕ, sau, echivalent, în toate lumile posibile accesibile agentului *a* este adevărat că ϕ. Bineînțeles, ca orice formulă a L_{EL}, și $K_a\phi$ este interpretată relativ la o lume posibilă (în cazul prezentat mai sus, la lumea actuală, *w*):

$M, w \vDash K_a\phi$ ddacă $\forall u: wRu \rightarrow M, u \vDash \phi$

În fine, o formulă ϕ este validă ddacă este adevărată în toate lumile posibile ale oricărui model Kripke.

1.4. Formula lui Moore

În această subsecțiune voi prezenta argumentul pentru validitatea formulei M (vezi mai jos enunțul acesteia), așa cum a fost prezentat și în van Benthem 2004, van Ditmarsch et al 2012 și Holliday (în curs de apariție).

Pentru a prezenta paradoxul lui Fitch, vom avea nevoie, mai întâi, să demonstrăm că următoarea formulă este validă:

$$(M)\ \neg K_a\ (p\ \&\ \neg K_a p),$$

Subformula $p\ \&\ \neg K_a p$ este cunoscută sub numele de *formula lui Moore* și este interesantă deoarece, deși poate fi construit un model care să conțină o lume posibilă relativ la care să fie adevărată, adevărul ei nu poate fi știut (exact ceea ce spune formula M de mai sus) de nici un agent, în nici o lume posibilă, indiferent de modelul construit (iar acesta este enunțul validității formulei M).

Vom începe argumentul prezentând două formule valide în sistemul S5 (dar și în sisteme mai slabe, cum ar fi S4 sau T). Prima este o formulă validă care spune că: dacă agentul știe că ϕ și ψ, atunci el știe că ϕ și știe că ψ:

$$(K) \qquad K_a(\phi\ \&\ \psi) \rightarrow (K_a\phi\ \&\ K_a\psi)$$

A doua este axioma T: nu pot fi știute decât propozițiile adevărate. Formal:

$$(T) \qquad K_a\phi \rightarrow \phi$$

Următoarea formulă este o instanță a axiomei K (în axioma K formula $\phi\ \&\ \psi$ este substituită prin $p\ \&\ \neg K_a p$):

$$(1) \qquad K_a\ (p\ \&\ \neg K_a p) \rightarrow (K_a p\ \&\ K_a \neg K_a p)$$

Formula (2), de mai jos, este o instanță a axiomei T (obținută prin substituirea formulei ϕ cu $\neg K_a p$):

$$(2) \qquad K_a \neg K_a p \rightarrow \neg K_a p$$

Să observăm că antecedentul formulei (2) este chiar una din conjunctele consecventului formulei (1). Atunci, folosind un simplu argument deductiv specific logicii propoziționale, obținem că:

$$(3) \qquad K_a\ (p\ \&\ \neg K_a p) \rightarrow (K_a p\ \&\ \neg K_a p)$$

Să observăm că formula $K_a p\ \&\ \neg K_a p$ este o contradicție. Cum orice formulă care implică o contradicție este falsă, avem că:

$$(M) \qquad \neg K_a\ (p\ \&\ \neg K_a p)$$

1.5. Paradoxul lui Fitch

În această subsecțiune voi prezenta paradoxul lui Fitch, așa cum a fost prezentat și în van Benthem 2004, van Ditmarsch 2012 și Holliday (în curs de apariție).

Argumentul lui Fitch urmărește să arate că dintr-o formulă intuitiv adevărată, și anume o formă a tezei verificaționiste: *orice adevăr poate fi cunoscut*, putem deduce o formulă imposibil de acceptat: *cunoaștem orice adevăr*. Pentru a formaliza teza verificaționistă este nevoie atât de limbajul logicii epistemice, cât și de limbajul logicii modale. De ce? Pentru că teza spune ceva cu privire la capacitatea noastră de a cunoaște anumite adevăruri și nu despre ceea ce știm. Dacă acceptăm că un enunț despre o capacitate este traductibil printr-un enunț despre ceea ce ne este posibil, putem interpreta teza verificaționistă în acest fel: *ne este posibil să cunoaștem orice adevăr*. Limbajul logicii modale acceptă drept formule bine formate și construcții precum: *este posibil să fie adevărat că p* (formal: $\Diamond p$) sau e*ste necesar să fie adevărat că p* (formal: $\Box p$). Atunci, enunțul conform căruia orice adevăr este cognoscibil poate fi formalizat folosind un limbaj modal-epistemic:

$$\text{(F1) } \phi \rightarrow \Diamond K_a\phi$$

Următoarea formulă este o instanță a formulei (F1) (de obținut substituind formula ϕ prin $p \,\&\, \neg K_a p$):

$$\text{(F2) } (p \,\&\, \neg K_a p) \rightarrow \Diamond K_a (p \,\&\, \neg K_a p)$$

Să folosim unul din rezultatele deja demonstrate mai sus și anume validitatea formulei (M):

$$\text{(M) } \neg K_a (p \,\&\, \neg K_a p)$$

Una din regulile de deducție ale logicii modale este următoarea: dacă o formulă este dedusă doar din axiomele acesteia și folosind regulile ei deducție, atunci putem deduce respectiva formulă prefixată de operatorul necesității. Cu alte cuvinte, dacă am dedus ϕ, atunci putem deduce că $\Box\phi$. Deci, din formula (M) putem deduce:

$$\text{(F3) } \Box\neg K_a (p \,\&\, \neg K_a p)$$

Operatorii necesității și posibilității sunt duali: a spune că o propoziție ϕ este necesar falsă este echivalent cu a spune că adevărul lui ϕ nu este posibil. Formal: $\Box\neg \phi \leftrightarrow \neg\Diamond \phi$. Atunci, din (F3), obținem:

$$\text{(F4) } \neg\Diamond K_a (p \,\&\, \neg K_a p)$$

Dar formula (F4) este negația consecventului formulei (F2) și folosind o regulă de deducție a logicii propoziționale, și anume *modus tollens*, obținem, din (F2) și (F4):

$$\text{(F5) } \neg(p \,\&\, \neg K_a p)$$

De asemenea, folosind instrumentul logicii propoziționale, putem verifica faptul că (F5) este echivalentă cu următoarea:

$$(F6)\ p \rightarrow K_a p$$

Dar, pentru că alegerea propoziției *p* a fost arbitrară, putem infera că:

$$(F7)\ \phi \rightarrow K_a\ \phi$$

2. LOGICA ANUNȚURILOR PUBLICE

2.1. Limbajul logicii anunțurilor publice

În această subsecțiune voi prezenta limbajul logicii anunțurilor publice, folosind Plaza 1989 și van Ditmarsch et al 2006.

Logica anunțurilor publice a fost descoperită independent de Jan Plaza (vezi Plaza 1989) și Jelle Gerbrandy (vezi Groeneveld și Gerbrandy 1997) cu scopul de a descrie felul în care evoluează setul de cunoștințe al unor agenți raționali ca urmare a învățării de adevăruri despre lume sau despre ceea ce știu anumiți agenți.

Limbajul logicii anunțurilor publice, $L_{PAL,}$ extinde L_{EL} cu formule de tipul $[!\phi]\psi$, formule care trebuie citite astfel: *după ce este anunțată formula ϕ, este adevărat că ψ.*[5] Formulele duale, $<!\phi>\psi$, sunt citite: *formula ϕ poate fi anunțată, iar apoi ψ este adevărată*. Formelele fiind duale, ține următoarea echivalență: $\neg[!\phi]\ \psi \leftrightarrow <!\phi>\neg\psi$.

Forma recursivă Backus-Naur care descrie *fbf*-urile L_{PAL} este următoarea:

$$\phi ::= p \mid \top \mid \neg\phi \mid \phi \,\&\, \psi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \rightarrow \psi \mid K_a\ \phi \mid <!\phi>\psi \mid [!\phi]\psi$$

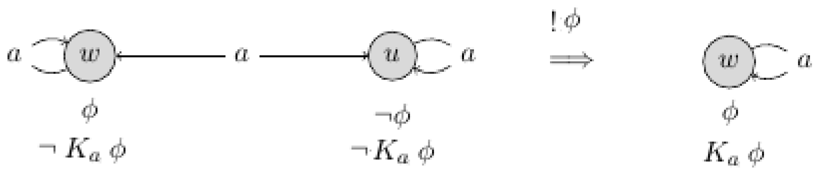
2.2. Semantica logicii anunțurilor publice

În această subsecțiune voi prezenta semantica logicii anunțurilor publice, așa cum este expusă în van Ditmarsch et al 2006.

Intuiția subiacentă interpretării formulelor de tipul $[!\phi]\psi$ este următoarea: după un anunț conform căruia formula ϕ este adevărată, modelul Kripke care reprezintă sistemul de cunoștințe al unui grup de agenți se schimbă în așa fel încât să conțină doar lumile posibile în care este adevărat că ϕ. Să continuăm exemplul din secțiunea anterioară, în care am reprezentat formal, folosind un model Kripke, situația în care relativ la lumea actuală, *w*, agentul *a* nu știe că plouă în București ($\neg K_a\phi$). Să presupunem că *a* ascultă un program meteo și una din informațiile primite este că în București plouă. În acest caz, agentul *a* nu ar mai trebui să considere posibilitatea conform căreia ϕ ar putea fi falsă. Cu alte cuvinte, nu ar mai trebui să considere lumea *u*, relativ la care ϕ este falsă, ca pe un candidat plauzibil la statutul de lume actuală. Modelul *M*, atunci, pentru a reflecta sistemul de cunoștințe al lui *a* după primirea informației conform căreia la București plouă,

[5] Trebuie menționat că operatorii: $[!\cdot]\ \cdot$ și $<!\cdot>\cdot$ sunt binari.

trebuie să se schimbe în așa fel încât să nu mai conțină lumea posibilă *u*. Mai jos sunt reprezentate grafic cele două situații epistemice: cea dinainte primirii informației cum că ϕ și cea care urmează primirii respectivei informații.



Definiția semantică a formulelor de tipul $[!\phi]\psi$ și $<!\phi>\psi$ respectă intuițiile cu privire la felul în care informația adevărată primită schimbă modelul Kripke ce reprezintă situația epistemică în care se află agentul *a*.

$$M,w \vDash [!\phi]\psi \text{ ddacă } M,w \vDash \phi \rightarrow M!\phi,w \vDash \psi,$$

$$M,w \vDash <!\phi>\psi \text{ ddacă } M,w \vDash \phi \;\&\; M!\phi,w \vDash \psi,$$

Unde $M!\phi = (W', R', V')$ este modelul *M* după efectuarea anunțului $!\phi$, construit astfel:

(1) Domeniul: $W'=\{w \in W \mid M, w \vDash \phi\}$

Noul domeniu, *W'*, este compus doar din lumile domneniului *W* care satisfac formula anunțată. Acum, să vedem efectul unui anunț public asupra relațiilor de accesibilitate ale modelului inițial:

(2) Relațiile de accesibilitate: $R_a'=R_a \cup (W' \times W'),\ \forall a \in Ag$

Relația *R* este restrânsă la noul domeniu, *W'*, alcătuit doar din lumile vechiului domeniu, *W*, care satisfac formula anunțată, ϕ.

(3) $V'=V \mid W'$

V' este restricția funcției *V* la mulțimea *W'*. Să ne amintim că domeniul funcției de asignare este mulțimea atomilor limbajului L_{PAL}, iar codomeniul este mulțimea tuturor submulțimilor domeniului.

Trebuie observat și faptul că potrivit definițiilor semantice de mai sus, formula de anunțat trebuie să fie adevărată relativ la lumea în care este făcut anunțul. Într-o subsecțiune ulterioară vom vedea că, prin introducerea noțiunii de protocol, pot fi aplicate și alte restricții cu privire la ce anume poate fi anunțat.

2.3. Axiomatica logicii anunțurilor publice

Axiomele PAL sunt numite și axiome de reducere, ele reducând, prin aplicarea lor repetată, orice formulă a L_{PAL} la o formulă a L_{EL}. Avantajul acestei abordări este rezolvarea elegantă a problemei completitudinii PAL. Având în vedere că formulele L_{PAL} sunt reductibile la formule ale L_{EL}, PAL este completă deoarece sistemul de logică epistemică S5 este demonstrat a fi complet (vezi Blackburn et al. 2002, Fagin et al 1995, pentru demonstrația de completitudine a S5 și Kooi 2007 pentru demonstrația de completitudine a PAL).

(1) Toate tautologiile logicii propoziționale
(2) Toate axiomele S5
(3) $[!\phi]p \leftrightarrow (\phi \rightarrow p)$, pentru p atom propozițional
(4) $[!\phi](\psi \,\&\, \chi) \leftrightarrow [!\phi]\psi \,\&\, [!\phi]\chi$
(5) $[!\phi]\neg\psi \leftrightarrow \phi \rightarrow \neg[!\phi]\psi$
(6) $[!\phi]K_a\psi \leftrightarrow (\phi \rightarrow K_a[!\phi]\psi)$
(7) $[!\phi][!\psi]\chi \leftrightarrow [!(\phi \,\&\, [!\phi]\psi)]\, \chi$

Reguli de deducție:
(8) Modus ponens

(9) $\vdash \psi$, atunci $\vdash K_a\psi$

(10) $\vdash \psi$, atunci $\vdash [!\phi]\psi$

3. PROTOCOALE PENTRU LOGICA ANUNȚURILOR PUBLICE

În această secțiune voi prezenta logica temporală a anunțurilor publice arbitrare (TAPAL[6]) a lui Tomohiro Hoshi (vezi Hoshi 2009, pp. 61-63, pp. 112-113, pp. 188-191), reformularea lui Hoshi a tezei verificaționiste (vezi Hoshi 2009, pp. 193-194), reconstrucția paradoxului lui Fitch în TAPAL (vezi Hoshi 2009, pp. 188 - 193) și felul în care acesta poate fi evitat (vezi Hoshi 2009, p. 195). Așa cum vom vedea, caracterul „temporal" al acestei logici este dat de semantica acesteia, ce folosește modelele epistemic-temporale pentru a capta semnificația protocolului (mai exact, cea de a dicta anunțurile posibile și ordinea lor), iar caracterul „arbitrar" este dat de introducerea operatorilor ce cuantifică peste formulele anunțabile.

3.1. Logica temporală a anunțurilor publice arbitrare

Așa cum am văzut în secțiunile anterioare, PAL poate descrie felul în care se schimbă setul de cunoștințe al unor agenți ca urmare a învățării (anunțării publice) anumitor adevăruri despre lume sau despre ceea ce știu (sau nu știu) anumiți agenți

[6] „Temporal Arbitrary Public Announcement Logic", cf. Hoshi 2009, p. 111.

ai grupului. Să ne amintim că în PAL orice formulă, dacă este adevărată, poate fi anunțată grupului. Dar, intuitiv, nu orice adevăr este anunțabil: convențiile, normele sociale ne pot impune să nu spunem (cel puțin în public) anumite adevăruri. Termenul folosit de Hoshi pentru a denota mulțimile de adevăruri anunțabile este cel de *protocol* (vezi Hoshi 2009). T. Hoshi (vezi Hoshi 2009, pp. 40–41) definește un protocol în cadrul TAPAL ca fiind o mulțime de secvențe[7] închise la relația de prefix finit alcătuite din formule ale L_{EL} asociată unui model Kripke. Cu alte cuvinte, un protocol specifică toate formulele anunțabile și ordinea în care pot fi anunțate în lumile unui model Kripke. Spre exemplu, protocolul $\pi=\{!p!q\}$ permite anunțarea lui p și, apoi, a lui q, dar nu permite anunțarea lui q fără ca înainte să fi fost anunțat atomul p. De asemenea, condiția închiderii la relația de prefix implică faptul că $!p$, prefix al secvenței $!p!q$, aparține protocolului π.

Generalizând, Hoshi (vezi Hoshi 2009, pp. 44–46, pp. 61–62) ia în considerare și cazul în care fiecare lume posibilă a unui model are asociat un protocol (*protocol dependent de stare*[8], sau lume posibilă). Altfel spus, este vorba de cazul în care fiecare lume posibilă are asociată mulțimea ei de secvențe anunțabile. În definițiile următoare vom asuma că fiecare lume posibilă are asignat același protocol.

Hoshi definește și din punct de vedere semantic noțiunea de protocol, ca reuniune a tuturor modelelor Kripke care pot fi obținute ca urmare a anunțării formulelor din protocol, în ordinea specificată de acesta. Acest model care cuprinde toate posibilele stări în care se poate transforma modelul inițial este numit *pădure Kripke*. Spre exemplu, dacă protocolul este $!p!q$, modelele ce vor compune pădurea Kripke corespunzătoare vor fi: M (modelul inițial), $M!p$ (modelul Kripke după anunțarea formulei p în modelul M) și $M!p!q$ (modelul Kripke după anunțarea formulei q în modelul $M!p$).

Să vedem cum este definită formal *pădurea Kripke* generată de anunțarea tuturor formulelor secvențelor unui protocol π:

Fie $M=(W, \{R_a\}_{a\in Ag}, V)$ un model Kripke și π un protocol. Atunci, pădurea Kripke $M^{\sigma,\pi}=(W^{\sigma,\pi}, R^{\sigma,\pi}, V^{\sigma,\pi})$ este definită prin inducție asupra lungimii secvenței σ (aparținând lui π):

1) $W^{\sigma 0,\pi}=W,\ R_a^{\sigma 0,\pi}=R_a(\forall a \in Ag),\ V^{\sigma 0,\pi}=V$

2) $w\sigma_{n+1} \in W^{\sigma n+1,\pi}$ ddacă (a) $w\in W$, (b) $M^{\sigma n,\pi}, w\sigma_n \vDash \sigma_{n+1}$, (c) $\sigma_{n+1}\in\pi$

3) $(w\sigma_{n+1}, u\sigma_{n+1}) \in R_a^{\sigma n+1,\pi}$ ddacă $(w, u) \in R_a$, $\forall(w\sigma_{n+1}, u\sigma_{n+1})\in W^{\sigma n+1,\pi}$

4) $\forall p \in$ At: $V^{\sigma n+1,\pi}(p)=\{ w\sigma_{n+1}\in W^{\sigma n+1,\pi} \mid w \in V(p)\}$

$M^{\sigma,\pi}$, conform regulii (1) conține modelul inițial. Apoi, $M^{\sigma,\pi}$ conține toate modelele ce pot fi obținute ca urmare a anunțării succesive a formulelor protocolului. Regula (2) ne spune că lumea $w\sigma_{n+1}$ va fi parte a domeniului $W^{\sigma n+1,\pi}$ (al modelului $M^{\sigma n+1}$) dacă, conform (2)(b) formula σ_{n+1} a putut fi anunțată la lumea $w\sigma_n$ a domeniului modelului $M^{\sigma n}$, adică dacă a fost adevărată relativ la $w\sigma_n$ (să ne

[7] T. Hoshi 2009 folosește termenul „sequence”.
[8] „State-dependent PAL-protocol”, v. Hoshi 2009, p. 61.

amintim că doar fomulele adevărate pot fi anunțate) și, confom (2)(c), anunțarea acesteia este permisă de protocolul π (a doua constrângere cu privire la ce formule pot fi anunțate, cea introdusă prin noțiunea de protocol).

Formulele de tipul $<!\phi>\psi$ se citesc așa cum sunt citite în PAL: *formula* ϕ *poate fi anunțată public, iar apoi* ψ *este adevărată*. Hoshi introduce în cadrul limbajului TAPAL și formule de tipul $\Diamond\phi$, al căror sens este cuantificațional: *există o formulă care poate fi anunțată public, iar apoi* ϕ *este adevărată*. Atunci, forma recursivă Backus-Naur care descrie toate formulele limbajului TAPAL este:

$$\phi ::= p \mid \top \mid \neg\phi \mid \phi \,\&\, \psi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \rightarrow \psi \mid K_a\phi \mid <!\phi>\psi \mid \Diamond\phi$$

Pentru a interpreta formulele de tipul $<!\phi>\psi$ și $\Diamond\phi$, Hoshi propune o semantică bazată pe modele epistemic-temporale[9] construibile pe baza unei păduri-Kripke. Dat fiind un model $M=(W,R,V)$ și un protocol π, modelul epistemic-temporal $\mathbb{H}=(H, R', V')$ generat de M este construit pe baza regulilor următoare (vezi Hoshi 2009, p. 62):

1. $H=\{h \mid h \in W^{\sigma,\pi}$, pentru $\sigma \in \pi\}$
2. $(h, h') \in R'_a$ ddacă $(h, h') \in R_a^{\sigma,\pi}$, pentru $\sigma \in \pi$ și orice $h, h' \in H$ astfel încât $h=w\sigma$ și $h'=u\sigma$
3. $h \in V'(p)$ ddacă $h \in V^{\sigma,\pi}$, pentru $p \in At$, , $\sigma \in \pi$, $h=w\sigma$.

Domeniul modelului $\mathbb{H}$ este o mulțime alcătuită din toate lumile posibile ale tuturor subdomeniilor pădurii Kripke generate de M. Atunci, formulele $<!\phi>\psi$ și $\Diamond\phi$ vor fi interpretate relativ la stările sau lumile posibile ale unui model epistemic-temporal $\mathbb{H}$ construit ca mai sus:

$$\mathbb{H}, h \vDash <!\phi>\psi \text{ ddacă } \mathbb{H}, w!\phi \vDash \top \text{ și } \mathbb{H}, w!\phi \vDash \psi$$

Explicitând, în modelul epistemic-temporal $\mathbb{H}$, relativ la lumea h este adevărat că ϕ poate fi anunțată public iar apoi este adevărat că ψ ddacă în domeniul H al modelul $\mathbb{H}$ există o lume $w!\phi$ ($\mathbb{H}, w!\phi \vDash \top$ ddacă $w!\phi \in H$) și relativ la aceasta este adevărat că ψ.

$$\mathbb{H}, h \vDash \Diamond\phi \text{ ddacă } \exists\psi \in \mathrm{L}_{\mathrm{EL}} : M, w!\psi \vDash \phi$$

Explicitând, în modelul $\mathbb{H}$, relativ la lumea h este adevărat că $\Diamond\phi$ ddacă există o formulă a L_{EL} după a cărei anunțare formula ϕ este adevărată. Având în vedere definiția lor semantică, formulele de tipul $\Diamond\phi$ spun ceva despre efectul unui anunț arbitrar asupra formulei ϕ.

Definiția semantică a formulelor epistemice $\mathrm{K}_a\ \phi$ va fi similară celei oferite în cadrul modelelor Kripke:

[9] „ETL-models” sau „Epistemic Temporal Logic models” (vezi Hoshi 2009).

$$\mathbb{H}, h \vDash K_a\phi \text{ ddacă } \forall h' \in H: hR'h' \rightarrow \mathbb{H}, h' \vDash \phi$$

Axiomele specifice TAPAL sunt următoarele (vezi Hoshi 2009, p.192, iar pentru întregul sistem axiomatic, pp. 73-74):

T1. $<!\phi>p \leftrightarrow <!\phi> \top \,\&\, p$ ($p \in At$)

T2. $<!\phi>\neg\psi \leftrightarrow <!\phi> \top \,\&\, \neg <!\phi> \psi$

T3. $<!\phi>K_a \psi \leftrightarrow <!\phi> \top \,\&\, K_a(<!\phi> \top \,\&\, <!\phi> \psi)$

T4. $<!\phi> \top \rightarrow \phi$

T5. $<!\phi>\psi \rightarrow \Diamond\phi$

Spre deosebire de axiomele PAL, acestea nu sunt axiome de reducere, deci demonstrația completitudinii pentru TAPAL nu va reieși din (*a*) traducerea tuturor formulelor TAPAL în formule ale L_{EL} și (*b*) demonstrația completitudinii pentru S5. Pentru a observa că reducerea nu este posibilă să observăm axiomele T1-T3: acestea conțin operatori TAPAL cu ocurență primară de ambele părți ale bicondiționalului, deci aplicarea lor repetată nu va duce la eliminarea lor.

Axiomele propuse de Hoshi reflectă, bineînțeles, și faptul că protocolul restrânge posibilitatea de a anunța anumite formule. Axioma T1 poate fi citită astfel: *Formula ϕ poate fi anunțată, după care este adevărat că p ddacă ϕ este anunțabilă și p este adevărată*. Formula $<!\phi> \top$ spune că ϕ este anunțabilă și este adevărată într-o lume posibilă *h* ddacă lumea $h!\phi$ există, deci, conform regulilor de construire a modelului epistemic-temporal, dacă ϕ este (1) adevărată și (2) anunțarea formulei ϕ este permisă de protocol. Axioma T4, $<!\phi> \top \rightarrow \phi$, spune că: *dacă ϕ este anunțabilă*, *atunci ϕ este adevărată*. Conversa, $\phi \rightarrow <!\phi> \top$, în schimb, nu este axiomă. Aceasta deoarece în TAPAL adevărul unei formule nu este condiție suficientă pentru a fi anunțabilă. Protocolul o poate exclude din lista formulelor anunțabile. Să construim și un model care respinge acest condițional. Fie modelul $M=(\{w\}, wRw, w\in V(p))$, căruia îi este asignat protocolul vid $\pi=\emptyset$. Construind modelul epistemic-temporal, generat de *M*, observăm că lumea *w!p* nu aparține acestuia, deci, deși *p* este adevărată relativ la *w*, formula $<!p> \top$ nu este, deci: $\mathbb{H}, \mathrm{w} \vDash p \,\&\, \neg <!p> \top$.

3.2. Analiza lui Hoshi a paradoxului lui Fitch în TAPAL

Odată avut acest aparat logic pus la punct, Hoshi arată cum în TAPAL paradoxul lui Fitch este evitabil dacă definim teza verificaționistă în următoarea manieră (vezi Hoshi 2009, pp. 182 - 195):

1. Întâi, Hoshi stabilește felul în care trebuie înțelese câteva formule ale TAPAL (vezi Hoshi 2009, p. 188). Hoshi nu intenționează să dea o nouă interpretarea semantică următoarelor formule, ci doar să fixeze un mod în care trebuie citite care să fie în acord cu conținutul tezei verificaționiste pe care o va propune.

a. Orice anunț public reprezintă, în TAPAL, executarea procedurii de verificare a propoziției anunțate.

b. $<!\phi>\top$ = procedura de verificare a formulei ϕ poate fi executată cu succes.

c. $<!\phi>\psi$ = procedura de verificare a formulei ϕ poate fi executată cu succes, iar apoi este adevărat că ψ.

d. $[!\phi]\psi$ = după ce procedura de verificare a formulei ϕ este executată cu succes, este adevărat că ψ.

e. $\Diamond\psi$ (adică $\exists\phi \in L_{EL}$ astfel încât $<!\phi>\psi$) = propoziția ψ este adevărată (sau devine adevărată) dacă procedura de verificare a unei propoziții oarecare poate fi executată cu succes. Cu alte cuvinte, adevărul lui ψ depinde de posibilitatea executării cu succes a unei proceduri de verificare.

*A*tunci, formula care exprimă faptul că formula ϕ poate fi cunoscută, $\Diamond K_a\phi$, are următorul înțeles:

f. $\Diamond K_a\phi$ = există o procedură de verificare a cărei executare este posibilă, apoi este adevărat că agentul ***a*** știe că ϕ (sau a cărei *executabilitate* duce la cunoașterea formulei ϕ).

g. Teza verificaționistă în reformularea lui T. Hoshi (TVH) are sensul următor (vezi Hoshi 2009, p. 193): **dacă**: după executarea procedurii de verificare a unei propoziții ϕ aceasta este adevărată, **atunci**: dacă poate fi executată procedura de verificare a propoziției ϕ, atunci ea este cognoscibilă în sensul în care există o procedură de verificare care a cărei executare duce la cunoașterea propoziției ϕ. Formal:

$$\text{(TVH) Dacă } \vdash [!\phi]\ \phi, \text{ atunci } \vdash <!\phi>\top \rightarrow \Diamond K_a\phi$$

Demonstrație. Folosind axiomele T1 – T5, vezi Hoshi 2009, p. 194.

Așa cum se vede, teza verificaționistă nu este o propoziție a unui limbaj formal, cum este cazul formulei $\phi\rightarrow\Diamond K\phi$ ce aparține unui limbaj modal-epistemic. În reformularea lui Hoshi, teza este reprezentată printr-un enunț metateoretic ce propune[10] derivabilitatea, ca teoremă, unei propozițiii din limbajul TAPAL dintr-o altă teoremă a limbajului TAPAL:

2. Acum, argumentează Hoshi, paradoxul este evitat pentru că $[!\phi]\phi$ nu este validă în TAPAL dacă ϕ este substituită prin $p\ \&\ \neg K_ap$. Dar pasul substituirii cu o formula Moore este unul necesar în argumentul lui Fitch, așa cum se poate vedea în demonstrația din subsecțiunea 1.5, în trecerea de la pasul F1 la F2! Argumentul din care reiese că $[!(p\ \&\ \neg K_ap)](p\ \&\ \neg K_ap)$ nu este validă presupune construirea unui model în care să existe o lume

[10] Hoshi stabilește relația respectivă printr-o demonstrație (vezi Hoshi 2009, p. 194).

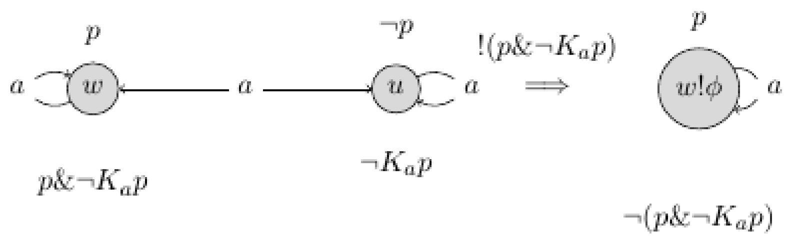
posibilă în care această formulă este falsă (deci $\neg[!(p \;\&\; \neg K_a p)]\,(p \;\&\; \neg K_a p)$ să fie adevărată relativ la aceasta). Modelul ales de Hoshi (v. Hoshi 2009, p.195), unul epistemic-temporal, $\mathbb{H}=(H, R', V')$, este construit pe baza unui model Kripke $M=(W, R, V)$ căruia îi este asignat un protocol $\pi=\{!(p \;\&\; \neg Kp)\}$ (deci conform căruia singura formulă care poate fi anunțată este formula lui Moore) și este definit astfel:

a) $W=\{w, u\}$. Domeniul lui M conține doar două lumi, w și u.
b) $\{(w,w), (w, u), (u, w), (u,u)\}=R$ (relația R este de echivalență și leagă w de u).
c) $w\in V(p)$, $u \notin V(p)$, deci $M, w\vDash p$ și $M, u \nvDash p$. Informal, p este adevărat la w, dar nu și la u.

În funcție de acest model Kripke și de protocolul asignat lui, modelul epistemic-temporal $\mathbb{H}=(H, R', V')$ este următorul:

a) $H=\{w, u, w!(p \;\&\; \neg Kp)\}$. Informal, domeniul lui $\mathbb{H}$ conține lumile modelului Kripke inițial și lumea $w!(p \;\&\; \neg Kp)$, lumea ce poate fi obținută că urmare a anunțării formulei $p \;\&\; \neg Kp$ în lumea w. Deoarece p este falsă în u, formula lui Moore nu poate fi anunțată în u. De asemenea, deoarece nici un alt anunț nu este permis de protocol, nici o altă lume nu poate fi construită din cele existente deja în domeniu.
b) $R'=\{wR'u, uR'w, wR'w, uR'u, w!(p \;\&\; \neg Kp)\}R'w!(p \;\&\; \neg Kp)\}\}$. Relația de echivalență R' leagă w de u și pe $w!(p \;\&\; \neg Kp)$ de ea însăși și de nici o altă lume.
c) $w\in V'(p)$, $u \notin V'(p)$, $w!(p \;\&\; \neg Kp) \in V'(p)$. Informal, p este adevărată doar în w și în $w!(p \;\&\; \neg Kp)$.

În figura de mai jos este reprezentat modelul epistemic-temporal definit mai sus. Lumea $w!\phi$ este lumea $w!(p \;\&\; \neg K_a p)$:



În modelul $\mathbb{H}$ avem că relativ la lumea $w!(p \;\&\; \neg K_a p)$ agentul a știe că p, deoarece $w!(p \;\&\; \neg K_a p)$ vede o singură lume, pe ea însăși, iar relativ la ea este adevărat că p. Atunci, formula lui Moore este falsă relativ la $w!(p \;\&\; \neg K_a p)$: $\mathbb{H}, w!(p \;\&\; \neg K_a p) \vDash \neg(p \;\&\; \neg K_a p)$. Din definiția semantică a operatorului pentru anunțuri publice, obținem: $\mathbb{H}, w \vDash \langle !(p \;\&\; \neg K_a p)\rangle\neg(p \;\&\; \neg K_a p)$. Dar, pentru că operatorii $[\cdot]\cdot$ și $<\cdot>\cdot$[11] sunt duali, avem că $\mathbb{H}, w \vDash \neg[!(p \,\&\, \neg K_a p)]\ (p \,\&\, \neg K_a p)$, ceea ce trebuia demonstrat.

4. OBSERVAȚII FINALE

Am văzut, mai sus, că reformularea lui Hoshi a tezei verificaționiste folosește enunțuri valide ale L_{TAPAL}. Putea fi exprimată teza verificaționistă în L_{PAL}? Nu, deoarece L_{PAL} nu poate exprima propoziții despre efectul anunțurilor arbitrare (vezi sensul formulelor de tipul $\Diamond\psi$ în TAPAL, în subsecțiunea 3.1 a acestui articol). Însă există sisteme logice care extind PAL cu operatori pentru anunțuri arbitrare care nu constrâng mulțimea de anunțuri posibile prin folosirea unui protocol, cum ar fi cele dezvoltate în van Benthem 2004, Ågotnes et al. 2010 și Balbiani et al. 2007. Hoshi argumentează că axiomele TAPAL, create pentru a guverna logica anunțurilor publice permise de un protocol, surprind: (1) relațiile între procedurile de verificare ale enunțurilor, (2) relațiile între procedurile de verificare și ceea ce cunoaștem ca urmare a efectuării lor, și (3) relațiile între procedurile de verificare și adevărul enunțurilor pe care le verifică (v. Hoshi 2009, p. 192–194). Spre exemplu, axioma T4 spune că *dacă procedura de verificare a enunțului ϕ poate fi executată cu succes, atunci ϕ este adevărată* fără a spune și că adevărul unei propoziții implică posibilitatea executării cu succes a procedurii acesteia de verificare. În subsecțiunea 3.1. am arătat cum poate fi construit un contra-model pentru conversa axiomei T4. Mai exact, am construit un model în care, relativ la o lume posibilă, este fals că $p \rightarrow <!p> \top$. Acesta, relativ la lumea posibilă w, făcea adevărat atomul p și falsă formula $<!p> \top$. Să observăm că în acel model, relativ la lumea posibilă w, este adevărat și că $\neg\Diamond p$, adică: nu există nici o procedură de verificare a cărei executare cu succes să fie posibilă iar apoi să fie adevărat că p. Dar, pentru ca atomul p să fie adevărat, într-un context filosofic verificaționist[12], trebuie ca acesta să fie, în principiu, verificabil. De asemenea, o altă posibilă critică la adresa soluției lui Hoshi este următoarea: teza verificaționistă reformulată este un condițional (vezi formula TVH din subsecțiunea 3.2.), iar falsificarea antecedentului tezei o face pe aceasta adevărată.[13][14] Această critică poate fi respinsă printr-o discuție asupra logicii subiacente enunțurilor metateoretice. Spre exemplu, logicile intuiționiste resping semantica obișnuită a condiționalilor conform căreia adevărul acestora este garantat de falsitatea antecedentului sau de adevărul consecventului (v. van Dalen 1986).

În secțiunile de mai sus am prezentat sistemul S5 de logică epistemică, semantica acestuia folosind modelele Kripke, logica anunțurilor publice și logica temporală a anunțurilor publice arbitrare (TAPAL) creată de T. Hoshi. Am prezentat paradoxul lui Fitch în logica modal-epistemică și, apoi, am arătat felul în

---

[11] Deci $<! \quad >\neg\psi \leftrightarrow \neg[! \quad]\psi$.

[12] Hoshi concepe un astfel de context și argumentează că argumentul lui, spre deosebire de altele, păstrează „spiritul filosofic verificaționist”, v. Hoshi 2009, p. 182.

[13] Un condițional al cărui antecedent este fals este adevărat.

[14] Hoshi remarcă acest lucru: „Such a vacuously satisfies NKT by falsifying the antecedent”, Hoshi 2009, p. 195. „NKT” este “TVH” în abrevierea folosită în acest articol și este formula Moore.

care Hoshi a reformulat teza verificaționistă (premisa de plecare a argumentului lui Fitch) și argumentul acestuia conform căruia, dată fiind această reformulare și semantica TAPAL, argumentul lui Fitch nu poate fi derulat.

Mențiune

Această lucrare a fost realizată în cadrul proiectului POSDRU/159/ 1.5/133675 "Inovare și dezvoltare în structurarea și reprezentarea cunoașterii prin burse doctorale și postdoctorale (IDSRC – doc postdoc)", cofinanțat de Uniunea Europeană și Guvernul României din Fondul Social European prin Programul Operațional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013.

BIBLIOGRAFIE

1. Ågotnes, T., P. Balbiani, H. van Ditmarsch, P. Seban. 2010. Group announcement logic, *Journal of Applied Logic*, Volume 8, Issue 1, March 2010, pp. 62–81, ISSN 1570–8683, http://dx.doi.org/10.1016/j.jal.2008.12.002.
2. Balbiani, P., A. Baltag, H. van Ditmarsch, A. Herzig, T. Hoshi, and T. de Lima. 2007. What can we achieve by arbitrary announcements? A dynamic take on Fitch's knowability. În *Proceedings of the 11th conference on Theoretical aspects of rationality and knowledge* (TARK '07). ACM, New York, NY, USA, pp. 42–51. DOI=10.1145/1324249.1324259 http://doi.acm.org/10.1145/1324249.1324259
3. van Benthem, J. 2004. What One May Come to Know. *Analysis*, 64(2):95–105, 2004.
4. Blackburn, P., M. de Rijke and Y. Venema. 2002. *Modal Logic*. Cambridge University Press.
5. van Dalen, D. 1986. Intuitionistic Logic. în *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 166, Gabbay, D. & Guenthner, F. (eds), Synthese Library, Springer Netherlands, pp. 225–339.
6. van Ditmarsch, H.P., B.P. Kooi and W. van der Hoek. 2006. *Dynamic Epistemic Logic*. Springer Publishing Company.
7. van Ditmarsch, H.P., W. van der Hoek, P. Iliev. 2012. Everything is Knowable – How to Get to Know Whether a Proposition is True. *Theoria*, 78(2):93–114, 2012.
8. Fagin, R., J.Y. Halpern, Y. Moses, M. Vardi. 1995. *Reasoning about Knowledge*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press 1995.
9. Groeneveld, W. and J. Gerbrandy. 1997. Reasoning about Information Change. *Journal of Logic, Language and Information*, 6(2):147–169.
10. Hintikka, J. 1962. *Knowledge and Belief*. Ithaca, N.Y., Cornell University Press.
11. Holliday, W.H. Forthcoming. Epistemic logic and epistemology. In Sven Ove Hansson, Vincent F. Hendricks, eds., Handbook of Formal Philosophy. Springer.
12. Hoshi, T. 2009. *Epistemic dynamics and protocol information*. PhD thesis, Stanford, CA, USA, 2009. AAI3364501.
13. Kooi, B.P. 2007. Expressivity and completeness for public update logics via reduction axioms. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 17(2):231–253.
14. Lewis, D. 1979. Possible worlds. In M.J. Loux, editor, *The Possible and the Actual*, pp. 225–235. Cornell University Press.
15. Plaza, J. 1989. Logics of public communcations. În M. L. Emrich, M. Z. Pfeifer, M. Hadzikadic, Z. W. Ras (eds.), *Proc. 4th Inernational Symposium on Methodologies for Intelligent Systems*, pages 201–216. Oak Ridge National Laboratory, ORNL/DSRD-24.
16. Solecki, S., A. Baltag, and L.S. Moss. 1999. The logic of public announcements, common knowledge and private suspicions. Technical report, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam. CWI Report SEN-R9922.