CONSIDERAȚII ASUPRA TERȚULUI EXCLUS ÎN LOGICA DE TIP INTUIȚIONIST

VICTOR EMANUEL GICA

În materialul de față vom expune considerații care urmăresc detalierea specificului doctrinei intuiționiste, pornind de la obiectivul său principal, practicarea unei matematici intuitive, pure, independentă de limbaj şi logică. Demersul specific pentru atingerea acestui obiectiv se sprijină pe câteva idei care, aşa cum arată Al. Surdu, pot fi considerate *teze intuiționiste fundamentale*, care rezumă particularitățile logice ale intuiționismului şi pe care le reproducem în continuare, aşa cum sunt prezentate de către logicianul român:

> (I) Matematica pură este o activitate *independentă* față de limbaj.
> (II) Obiectul matematicii pure îl constituie construcțiile matematice *intuitive nelingvistice*.
> (III) Obiectul logicii matematice îl constituie limbajul matematic în care sunt exprimate, mai mult sau mai puțin exact, construcțiile matematice.
> (IV) Existența matematică efectivă implică întotdeauna noncontradicție logică; noncontradicția logică nu implică însă întotdeauna existența matematică efectivă.
> (V) Practicarea unei matematici corecte şi a unei logici corespunzătoare face *imposibilă* apariția paradoxelor.
> (VI) *Tertium non datur* şi *duplex negatio* nu pot fi universal valabile în cadrul unei logici corecte, dar nu pot fi nici false.
> (VII) Axiomatizarea nu poate fi admisă drept metodă de *construcție* a teoriilor matematice, ci numai ca *mijloc auxiliar* pentru descrierea şi sistematizarea teoriilor matematice intuitive preexistente[1].

Cerința independenței de logică cuprinsă în obiectivul programului intuiționist propriu-zis nu indică o adversitate față de logica în genere, ci, în mod special, față de variantele *logiciste* şi *formaliste* ale logicii matematice. Referindu-se la acest aspect Al. Surdu consideră că „intuiționistic vorbind, este cu totul îndreptățită profesarea unei *logici simbolice*, adică a unei logici în formă de calcul, cu condiția ca aceasta să nu fie aplicată la matematici, nici pentru *fundarea* (poziția logicistă) şi nici pentru *construcția* lor formală (poziția formalistă), ci dimpotrivă *matematicile trebuie să constituie fundamentele logicii, să fie aplicate la logică*, după ce au fost construite intuitiv"[2].

---

[1] Al. Surdu, *Elemente de logică intuiționistă*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1976, p. 19.
[2] *Ibidem*.

În acest sens, intuiționismul poate fi considerat ca o a treia cale de referință în încercările de soluționare a paradoxurilor logico-matematice, care oferă o perspectivă diferită şi în opoziție atât cu soluția logicistă, cât şi cu cea formalistă. Atitudinea critică manifestată în cadrul intuiționismului este fundamentală şi determinantă. Maniera criticismului contemporan intuiționist nu este nici una de tip *istoric* (aristotelic) şi nici de tip sistematic (kantian), ci mai degrabă, consideră Al. Surdu, este una asemănătoare îndoielii carteziene. Criticismul intuiționist, însă, nu vizează o arie atât de vastă precum cel cartezian, ci este orientat în mod direct şi efectiv atât împotriva logicismului, cât şi a formalismului[3]. Atât antiformalismul, cât şi antilogicismul conduc în mod implicit la constructivism, iar constructivismul de tip logic sau matematic stă la originea intuiționismului. În cazul antilogicismului, punctul de plecare îl reprezintă problema paradoxurilor logico-matematice.

În privința catalogării terminologice, datorate lui Heyting, în „preintuiționism" şi „intuiționism", fiecare cu variantele lor, Al. Surdu arată că aceste distincții au sens numai din punct de vedere matematic, fără ca să existe o deosebire între ele din punct de vedere filosofic, ci, dimpotrivă, „preintuiționiştii au fost în multe privințe mult mai consecvenți decât aşa numiții intuiționişti actuali, dintre care majoritatea sunt ultraformalişti"[4]. Miza acestor denumiri diferite pare a fi chiar originalitatea operei lui Brouwer, care însă nu este pusă cu nimic în discuție prin acestea. Al. Surdu optează pentru punctul de vedere al lui Oskar Becker, care numeşte „intuiționismul" lui Brouwer „neointuiționism", însă nici acesta nu pare pe deplin potrivit, întrucât ar viza doctrina general filosofică a intuiționismului contemporan ca opusă neopozitivismului şi neoplatonismului, şi nu o teorie opusă doar logicismului şi formalismului, fără consecințele lor filosofice. Deosebirile dintre intuiționismul contemporan în genere şi intuiționismul lui Brouwer constau în caracterul lor, primul având un pronunțat caracter carteziano-criticist, şi ca atare, *metodologico-gnoseologic*, în timp ce ultimul are un evident caracter logic, respectiv *logico-matematic*[5].

Privită din perspectiva acestei distincții, teoria lui Brouwer, care poate fi numită intuiționism logic, se deosebeşte de intuiționismul gnoseologico-metodologic prin anumite trăsături, dintre care Al. Surdu menționează în primul rând caracteristica unui anume *istorism* de tip aristotelic, dar mult mai vag conturat decât acesta din urmă. Alături de acestea se pot distinge alte două caracteristici, una cu puternic accent kantian manifestată prin *criticismul* declarat al teoriei şi cealaltă de tip cartezian, aşa numita suspiciune brouweriană care vizează principiile gândirii[6].

Având în vedere atât caracteristicile generale, cât şi particularitățile specifice intuiționismului logic, Al. Surdu consideră că doctrina lui Brouwer poate fi expusă în linii mari şi pe aceleaşi probleme ca şi cea aristotelică. De altfel, maniera generală de abordare a problemei paradoxurilor de către Brouwer, care consideră

[3] Al. Surdu, *Neointuiționismul*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1976, p. 48.
[4] *Ibidem*, p. 48.
[5] *Ibidem*, p. 49.
[6] *Ibidem*, p. 63.

paradoxurile *erori* logice, poate fi subsumată demersurilor incluse de către A. Dumitriu în aşa numita *poziţie strict logică* în soluţionarea paradoxurilor.

Sursa paradoxurilor logico-matematice nu se află nicidecum în eroarea cercului vicios. Brouwer respinge atât valabilitatea soluţiilor de tip logicist, cât şi a celor formaliste. În disputa dintre Russell şi Poincaré acceptă punctul de vedere al celui din urmă cu oarecare rezerve, întrucât Poincaré de fapt nu ar surprinde sursa reală a dificultăţilor logiciste. În ansamblu, cauza erorilor care generează paradoxurile este chiar identificarea logicistă a matematicii cu logica. Sursa acestei identificări este plasată la nivelul confuziei dintre actul construcţiei matematice şi limbajul matematic, esenţială pentru matematica efectivă fiind *construcţia* mentală a rezultatului matematic şi nu mijlocul de comunicare a acestuia, expresia sa lingvistică. Aşa cum notează şi Al. Surdu, limbajul matematic nu este altceva decât un mijloc de comunicare a activităţii matematice şi, în această postură, se supune legilor obişnuite ale oricărui limbaj, analiza unei *expuneri matematice* fiind asemănătoare analizei logice a unui text oarecare.

În sens brouwerian, principiile logicii clasice nu sunt, la rândul lor, altceva decât tot reguli lingvistice, întrucât cei care le respectă din punct de vedere lingvistic pot să fie conduşi de experienţă, fără ca aceasta (exprimarea lingvistică) să fie necesară. Stephan Körner remarcă în aceeaşi direcţie, a independenţei matematicii atât faţă de limbaj, dar şi faţă de logică, faptul că regulile logice clasice sunt folosite în descriere şi comunicare, dar nu şi în activitatea propriu-zisă de construcţie, fiind astfel un fel de ajutoare neesenţiale[7].

Abordarea logicistă se limitează numai la construcţii lingvistice ce nu pot conduce la matematica reală, în timp ce abordarea ca şi construcţie intuitivă a actului mental de construcţie matematică garantează existenţa entităţilor matematice, eventualele aspecte contradictorii, sau nu, ale limbajului care exprimă o astfel de construcţie sunt lipsite de importanţă, atâta timp cât acest limbaj nu reprezintă creaţia nici unei entităţi matematice[8].

Având în vedere distincţia categorică între construcţia matematică şi activitatea lingvistică – totalitatea propoziţiilor despre rezultatele construcţiei, precum şi tot ceea ce înseamnă aplicare a regulilor de raţionament în aceste propoziţii, intuiţionist vorbind, se pune întrebarea dacă reprezentarea logico-lingvistică este adecvată în mod riguros şi întotdeauna construcţiei[9]. Posibilitatea ca aceasta să depăşească limitele construcţiei nu poate fi ignorată, iar pericolul acestei depăşiri ar exista şi în matematică, de exemplu în situaţii în care este utilizat principiul terţului exclus în raţionamente practicate în cadrul unor sistem infinit de obiecte matematice şi în care limbajul ar depăşi realitatea matematică. Sintetizând caracteristicile principale al doctrinei intuiţioniste a lui Brouwer, O. Becker notează:

---

[7] S. Körner, *Introducere în filosofia matematicii*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965, p. 162

[8] Al. Surdu, *op. cit.*, p. 64.

[9] S. Körner, *op. cit.*, p. 162.

> Ceea ce caracterizează pe Brouwer mai întâi de toate este respingerea principiului logic al terţului exclus atunci când se aplică la mulţimi infinite, apoi considerarea construcţiei ca unic mijloc de definire a mulţimilor, precum şi fundamentarea oricărei demonstraţii de existenţă şi a întregii matematici pe intuiţia originară a şirului de numere, care este privit ca dezvoltându-se în timp. Aceasta e în legătură cu conceptul său de *şir de alegeri*, un şir nelimitat de numere care pot fi alese arbitrar, asupra cărora pot fi făcute totuşi în anumite condiţii afirmaţii matematice; de asemenea este în legătură cu concepţia sa despre continuu ca un mediu de liberă devenire. Demn de reţinut şi dictonul lui Brouwer; *Matematica este mai mult acţiune decât teorie*.[10]

Al. Surdu remarcă în acest sens că, atâta timp cât definiţia unei entităţi nu înseamnă existenţa ei, Brouwer se plasează în continuarea tradiţiei intuiţioniste, adăugând totuşi un element esenţial, „inadmisibil pentru intuiţioniştii de tip gnoseologico-metodologic, şi anume faptul că pentru entitatea matematică, independentă de expresia ei lingvistică, *este indiferent dacă această expresie este sau nu contradictorie.*”[11] Introducerea acestui element aduce cu sine o dublă perspectivă de abordare a problemei paradoxurilor: una referitoare la obiect şi cealaltă referitoare la expresia lui lingvistică, ceea ce impune două căi şi, în acelaşi timp, două metode de tratare a problemei, una de tip aristotelic, conformă cu obiectul şi cealaltă de tip cartezian, pur logică, şi care reprezintă caracteristica esenţială a neointuiţionismului[12]. În sensul acestei noi semnificaţii date paradoxurilor din dublă perspectivă – a obiectului asupra cărora poartă şi a principiilor care se aplică acestui obiect, în speţă logica –, Brouwer distinge între paradoxurile antice, care vizează ştiinţa, sau cunoaşterea în genere şi cele moderne (paradoxurile Burali-Forti, Zermelo, König, Richard şi Russell), care poartă asupra entităţilor matematice ce sunt chiar obiectul paradoxurilor şi care par a fi paradoxuri matematice.

Posibilele aspecte contradictorii ale limbajului, în care este exprimată construcţia mentală a rezultatelor matematicii, sunt lipsite de importanţă din punct de vedere matematic. Matematica pură este, din punct de vedere intuiţionist, o activitate independentă de limbaj, care are ca obiect construcţiile matematice intuitive nelingvistice. Astfel că, paradoxele în discuţie nu sunt, ci numai par a fi, paradoxe matematice. Una dintre tezele intuiţionismului, care a determinat opoziţia permanentă faţă de demersurile formaliste de axiomatizare a teoriei mulţimilor este că existenţa matematică efectivă implică întotdeauna non-contradicţie logică, ceea ce nu este valabil şi reciproc, non-contradicţia logică neimplicând întotdeauna existenţa matematică efectivă[13].

Pe de altă parte, atâta timp cât acestea nu apar în logica în genere, ci în logica matematică în special, în care valabilitatea principiului terţului exclus este admisă ca absolută şi universală, acestea nu pot fi considerate nici paradoxe logice[14].

---

[10] O. Becker, *Fundamentele matematicii*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1968, p. 361.
[11] *Ibidem*, p. 65.
[12] *Ibidem*.
[13] Al. Surdu, *Elemente de logică intuiţionistă*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1976, p. 18.
[14] *Ibidem*, pp. 12–13.

Practicarea unei matematici corecte şi a unei logici corespunzătoare ar face imposibilă apariţia paradoxelor. Rezumând, soluţia lui Brouwer în problema paradoxurilor presupune interpretări corecte, pe de o parte, o a entităţilor matematice (*anticantoriană*) şi, pe de altă parte, a logicii (*antilogicistă*); practicarea corectă atât a logicii, cât şi a matematicii ar face imposibilă apariţia paradoxelor.

În problema continuului din perspectiva principiilor cantoriene, în legătură cu problemele pe care Brouwer le pune în privinţa continuului aritmetic în genere, Al. Surdu arată că acestea pot fi împărţite în două clase: una privind problemele legate de *continuul liniar*, care se referă, pe de o parte, la interpretarea generală a entităţilor care alcătuiesc continuul şi, pe de altă parte, la posibilitatea producerii de astfel de entităţi, şi o a doua clasă, probleme care sunt legate de admiterea unor alte puteri decât cea a continuului. Problemele din clasa continuului liniar, în care continuul este conceput temporal şi dinamic, ca o scurgere a timpului, evidenţiază caracterul intuitiv al concepţiei lui Brouwer din punct de vedere filosofic. Este vorba de o concepţie diametral opusă faţă de interpretarea teoriei cantoriene care, având un caracter spaţial şi static, face ca matematica clasică să fie limitată la succesiuni infinite predeterminate. Opoziţia lui Brouwer faţă de teoria cantoriană se manifestă şi în problema puterii continuului, în care susţine că nu pot fi admise *mulţimi nenumărabile* şi, în consecinţă, nici *mulţimea tuturor mulţimilor nenumărabile*[15]. Al. Surdu observă că esenţial pentru modul în care este tratată problema obiectului asupra căruia poartă paradoxele în cadrul acestei dispute este modul de alcătuire a numerelor reale din mulţimi infinite de zecimale, şirul cantorian al numerelor reale dintre 0 şi 1 apărând drept mulţime acestor mulţimi infinite, concept neconstructiv şi, din punct de vedere intuiţionist, eronat. Astfel că atât timp cât conceptul de mulţime a tuturor mulţimilor nu este admis, este eliminată şi posibilitatea definirii logice a numerelor ca mulţimi ale tuturor mulţimilor şi, odată cu aceasta, posibilitatea apariţiei paradoxurilor în matematică.

Al. Surdu este de părere că încercările lui Brouwer de a demonstra temporal-logic că un continuu aritmetic (ca întreg infinit) nu poate fi nici parcurs şi nici depăşit prin construcţii succesive, ci poate fi parcurs numai în principiu, devenind el însuşi o posibilitate, presupun o concepţie specială atât asupra infinitului, cât şi a mijloacelor logice prin care acesta poate fi conceput[16].

Pentru intuiţionişti, aşa cum am mai menţionat, sursa paradoxurilor logico-matematice nu trebuie căutată nicidecum în eroarea cercului vicios, ci într-o interpretare specifică a conceptului de infinit, bazată pe teoria generală a *infinitului potenţial*. Concepţia intuiţionistă despre infinit reprezintă şi soluţia propusă în problema continuului aritmetic. Aşa cum menţionează şi Al. Surdu, problema infinitului este tratată în spirit aristotelic, acesta neadmiţând infinitul actual. Brouwer pune în legătură existenţa infinitului aritmetic cu interpretarea temporală a continuului intuitiv, respectiv cu scurgerea timpului. În problema infinitului şi principiilor logice, Brouwer nu acceptă existenţa succesiunilor infinite convergente predeterminate de numere raţionale cu ajutorul cărora sunt definite numerele reale

[15] Al. Surdu, *Neointuiţionismul ...*, pp. 67–68.
[16] *Ibidem*, p. 70.

în matematica clasică cantoriană (neintuiţionistă), propunând în schimb ceea ce numeşte „secvenţe infinite convergente care înaintează liber”, deci succesiuni care nu au fost date în prealabil, ci sunt în devenire[17].

Succesiunile infinite sunt, din acest punct de vedere, de două feluri: *particular-determinate* şi *nedeterminate*. Succesiunea infinită particular determinată de numere poate fi definită printr-o lege de formare a elementelor, pe baza căreia poate fi determinat orice element al şirului în funcţie de elementul antecedent şi elementul consecvent. Prin acest *mecanism* se garantează înaintarea succesiunii la infinit şi se obţine totodată o metodă prin care poate fi construit întotdeauna un nou element pe baza elementelor deja construite. Această posibilitate, garantată de ceea ce Brouwer numeşte *al doilea act al intuiţionismului*, asigură succesiunilor infinite un caracter dinamic; ele nu sunt în fapt infinite, ci tind către infinit. Acelaşi al doilea act al intuiţionismului garantează şi formarea unor succesiuni infinite nedeterminate, care se produc treptat prin acte libere de alegere a elementelor. Odată cu aceasta, consideră Al. Surdu, „asistăm la un proces evident de *dialecticizare* a aritmeticii”. Tratarea dialectică a infinitului a fost posibilă odată cu sciziunea formalistă şi diferenţierea aritmeticii elementare de cea transfinită. În acest sens, eşecul formalismului ar consta în faptul că, odată ce a surprins transfinitul, a revenit din nou la punctul de vedere finitist, respectiv la simpla constatare a contradicţiei dintre finit şi infinit[18].

Al. Surdu precizează că, în timp ce poziţia cantorian formalistă, finitistă constă în teza infinitului actual, spaţializat şi tratat *ad extremum* ca un finit (un finit „deghizat”), poziţia intuiţionistă nu este înţeleasă întotdeauna în mod corect. Autorul român consideră curioasă părerea lui S. Körner, de exemplu, pentru care poziţia intuiţionistă ar fi finitistă, întrucât nu admite infinitul actual. Astfel de interpretări ar fi, după Al. Surdu, rezultatul lipsei de înţelegere a ideii dialectice de infinit, ca *mediu al oricărei deveniri libere*, care determină succesiuni infinite, iar infinitul în doctrina intuiţionistă este unul *potenţial*.

Succesiunile *determinate* care înaintează *ad infinitum*, aşa cum arată Al. Surdu, se produc pe baza legilor de formare a elementelor, care garantează menţinerea relaţiilor între elementele obţinute indiferent de numărul noilor elemente adăugate, prin devenire determinată se formează succesiuni supuse unor clasificări predicative.

La rândul lor *succesiunile finite* pot fi: *determinate*, în care fiecare element este cunoscut, şi *parţial determinate*, elementele acestora din urmă fiind cunoscute numai parţial, dar cu posibilitatea cunoaşterii lor în întregime într-un timp limitat. Aşa cum menţionează şi Al. Surdu, distincţiile de mai sus nu apar în mod explicit la Brouwer, primele sunt discutate în opera lui Poincaré, la care Brouwer face ample referiri, iar ultimele sunt considerate de către autorul român ca evidente. În contextul disputei privind obiectul asupra căruia poartă paradoxele logico-matematice, considerăm că aceste distincţii explicitează şi clarifică particularităţile doctrinei intuiţioniste în probleme urmărite în lucrarea de faţă.

[17] *Ibidem*, p. 71.
[18] *Ibidem*, p. 72.

Rezumând, combaterea din perspectiva dialectic intuiţionistă asupra infinitului potenţial a poziţiei cantoriene, ale cărei consecinţe conduceau la paradoxuri, ridică aşa cum am mai menţionat, problema unei metode dialectice adecvate acestui studiu. Cu alte cuvinte, citând pe Al. Surdu, se pune următoarea întrebare:

> Dacă logica în accepţiunea logistică, aplicată la infinitul conceput cantorian, a dus la contradicţii, oare acest lucru s-a datorat numai concepţiei greşite a infinitului actual? Dacă s-a datorat numai acestei greşeli, atunci, ea fiind îndreptată, logica rămâne valabilă[19].

Poziţia iniţială a lui Brouwer referitoare la această situaţie nu ia în considerare valabilitatea logicii, care de vreme ce nu are vreun aport în cadrul construcţiilor matematice posibile independent de logică, pare că nu mai are nicio utilitate, problema paradoxelor găsindu-şi rezolvarea prin chiar interdicţia de a aplica logica la procesul construcţiei matematice. O astfel de poziţie asupra validităţii logicii, este de părere Al. Surdu, survine şi dintr-o abordare din perspective general filosofice, îndepărtate de cadrul strict al matematicii. Oricum ar sta lucrurile, această poziţie conduce totuşi la *suspiciunea brouweriană* privind valabilitatea universală a principiilor logice. Mai precis, încrederea în principiul silogismului şi în principiul contradicţiei este justificată. În cazul principiului silogismului, este avută în vedere varianta sa din logica matematică, iar incertitudinea nu pare a stărui prea mult, atât timp cât silogismul este considerat o simplă tautologie care constă în includerea unui sistem *b* într-un sistem *c*, iar prin combinarea ei cu includerea unui sistem *a* în sistemul *b* este evident că sistemul *a* va fi inclus în *c*. La fel de evidentă pare să fie şi acceptarea principiului contradicţiei, în care realizarea în mod determinat a incluziunii unui sistem *a* într-un sistem *b* şi nerealizarea acestei incluziuni se exclud reciproc.

Suspiciunea manifestată din perspectivă intuiţionistă privitor la valabilitatea universală a principiilor logice este îndreptată în primul rând împotriva principiului terţului exclus (*tertium non datur*), care, în matematică, ar trebuie aplicat cu anumite rezerve. Mai sunt vizate de aceeaşi suspiciune şi legea dublei negaţii (*negatio duplex*) şi demonstraţia indirectă (*reductio ad absurdum*).

Motivele acestei suspiciuni faţă de valabilitatea principiului terţului exclus reies din faptul că acesta ar presupune ceva în plus faţă de celelalte principii. Condiţia impusă de terţul exclus, ca orice ipoteză să fie matematic sau corectă sau incorectă, ar face ca problema valabilităţii sale să echivaleze cu posibilitatea aşa numitelor *probleme matematice insolubile*, considerând că nu poate exista nicio dovadă în favoarea tezei că nu există acest gen de probleme. Astfel că principiul terţului exclus nu mai este universal valabil în domeniul transfinitului[20].

Valabilitatea principiului terţului exclus nu este respinsă, ci doar limitată. Adepţii intuiţionismului admit argumentările bazate pe terţul exclus numai în cazul mulţimilor finite, respingându-le valabilitatea pentru mulţimile infinite. În această ipostază, ideea infinitului actual, încheiat, specific matematicii şi logicii clasice, nu

[19] *Ibidem*, p. 74.
[20] *Ibidem*, p. 76.

este admisă, ci doar ideea unui infinit potențial, mereu în devenire, niciodată încheiat.

În domeniul succesiunilor care înaintează spre infinit este posibilă oricând apariția unei probleme care necesită o infinitate de operații. Prin urmare, se poate considera că *a priori* legea terțului exclus nu este universal valabilă în domeniul transfinitului; aceasta nu implică însă că legea terțului exclus este falsă, ci că aplicarea ei fără restricții în domeniul transfinitului este incorectă. Aşadar, limitarea aplicării se referă la domeniul succesiunilor infinite determinate, în cadrul cărora este posibilă existența unor situații în care rezolvarea unor probleme ar necesita o infinitate de operații. În astfel situații, în care nu există posibilitatea reală a verificării, a dovedi că un enunț este fals nu implică neapărat (*tertium non datur*) adevărul enunțului contrar. Probarea adevărului acestui enunț ar necesita o indicație experimentală sau de construcție, iar atunci când este vorba de mulțimi infinite, există cel puțin un caz în care nu putem face acest lucru. De aici axioma lui Brouwer: *absurditatea absurdității nu implică adevărul* (adevărul însă implică absurditatea absurdității). Cu alte cuvinte, absurditatea absurdității (echivalentul intuiționist al negației clasice) exprimă o modalitate particulară a propozițiilor, care diferă de noțiunile simple de *adevăr* şi *fals*. Sintetizând, prin conceperea infinitului ca *potențial* şi nu ca *actual* şi interzicerea terțului exclus în domeniului mulțimilor infinite, Brouwer consideră paradoxele infinitului eliminate.

Al. Surdu precizează că fermitatea poziției lui Brouwer în privința neacceptării valabilității universale a principiului terțului exclus a variat cu diferite nuanțări, de la o tendință inițială către afirmații care par să contrazică atât poziția inițială, cât şi pe cele ulterioare. Cu toate acestea, într-un studiu din anul 1923[21] revine cu considerațiile prin care, pe baza posibilității efectuării unei verificări concrete a tuturor elementelor, se poate admite valabilitatea principiului terțului exclus în sistemele finite, ceea ce echivalează cu a accepta că principiul nu poate fi fals[22]. Valabilitatea principiului acoperă şi sistemele finite parțial determinate, iar concluziile obținute pe această bază pot fi confirmate în ipostaza în care intervalul de timp destinat verificării lor este unul suficient.

Valabilitatea absolută a aplicării principiilor şi legilor logicii, inclusiv a terțului exclus la mulțimi finite, reprezintă în concepția lui Brouwer o extragere a logicii clasice din domeniul finitului matematic, considerarea valabilității ei *a priori* şi aplicarea ei nejustificată la domeniul transfinitului. Consecința caracterului *a priori* atribuit legilor logicii teoretice, scrie Brouwer, a fost că, până nu de mult, aceste legi, inclusiv legea terțului exclus, au fost aplicate fără restricții şi în matematica sistemelor şi nimeni nu s-a lăsat tulburat de aprecierea că rezultatele obținute pe această cale nu mai sunt în genere accesibile verificării empirice, nici teoretic şi nici practic, iar pe această bază au fost construite vaste teorii false, în special în ultima jumătate de secol.

---

[21] L.E.J. Brouwer, *On the significance of the principle of excluded middle in mathematics, especially in function theory*, în *From Frege to Gödel*, Havard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1967.

[22] Al. Surdu, *op. cit.*, p. 76.

> An *a priori* character was so consistently ascribed to the laws of theoretical logic that until recently these laws, including the principle of excluded middle, were applied without reservation even in the mathematics of infinite systems and we did not allow ourselves to be disturbed by the consideration that the results obtained in this way are in general not open, either practically or theoretically, to any empirical corroboration. On this basis extensive incorrect theories were constructed, especially in the last half-century.[23]

Referiri la principiul terțului exclus face şi în mai multe lucrări ale sale prezentând, aşa cum menționează şi Al. Surdu, şi anumite variante, care sunt formulări ale unor aplicații matematice ale principiului în domenii mai mult sau mai puțin restrânse. De exemplu, o variantă a principiului simplu al terțului exclus este enunțată în domeniul raportului dintre entitățile matematice şi proprietățile lor, în care principiul este valabil în raport cu o anumită entitate dată.

> Fiecare atribuire *T* a unei propoziții la o entitate matematică poate fi judecată, adică poate fi demonstrată sau redusă la absurd[24].

Odată făcută distincția între domeniul infinitului şi domeniul finitului privind valabilitatea de aplicare a principiului terțului exclus, ar rămâne cercetarea posibilității introducerii unei distincții asemănătoare şi în cadrul domeniului infinitului, problemă asupra căreia, după cum menționează Al. Surdu, Brouwer nu insistă, şi care are va fi abordată în linii mari de către A. Heyting[25].

În linii mari, neacceptarea în mod rigid a aplicabilității universale a principiilor logicii, în speță limitarea sferei de valabilitate a principiului terțului exclus la domeniul finitului, constituie în cadrul poziției intuiționiste, soluția la cea de-a doua categorie de surse ale paradoxurilor, respectiv aplicarea incorectă a principiilor logicii. Alături de o tratare a corectă a obiectului matematic, cele două condiții fac imposibilă, în perspectivă intuiționistă, apariția paradoxurilor.

În cadrul criticii pe care o face formalismului, suspiciunea brouweriană este îndreptată către necesitatea formalistă a demonstrației caracterului non-contradictoriu al matematicii, care reprezintă *de facto* scopul declarat al formalismului şi ia forma întrebării despre posibilitatea existenței unor teorii *incorecte necontradictorii*. Acuzația adusă formaliştilor vizează practicarea incorectă a matematicii. Posibilitatea teoriilor incorecte necontradictorii ar plasa aceste teorii în afara sferei criticii formaliste, iar nerespingerea şi menținerea lor ar da posibilitatea introducerii de noi astfel de teorii incorecte, fără a mai fi generate paradoxuri.

Prin urmare, distincția între existența matematică şi noncontradicție reprezintă, aşa cum notează şi Al. Surdu, o primă teză în critica formalismului. În fond, perspectiva conceptului intuiționist fundamental de *existență a obiectului matematic* plasează oarecum din start intuiționismul pe poziții antiformaliste.

[23] L.E.J. Brouwer, *op. cit.*, p. 336.

[24] L.E.J. Brouwer, *Consciousness, philosophy and mathematics*, Proc. X-th Intern. Congress of Philosophy, Amsterdam, 1948, p. 244.

[25] Al. Surdu, *op. cit.*, p. 79.

Plasându-se în aceeaşi sferă a confundării obiectului matematic cu logica formală, fără să ajungă la paradoxuri, formalismul nu poate totuşi evita posibilitatea teoriilor incorecte, câtă vreme şi matematica, şi logica sunt practicate ca un simplu joc de semne fără nicio semnificaţie.

Rezumând, critica formalismului se păstrează în cadrul aceloraşi linii mari ale doctrinei intuiţioniste: pe de o parte, identificarea existenţei matematice cu noncontradicţia conduce la practicarea incorectă de către formalişti matematicii. Pe de altă parte, aplicarea nerestrictivă a principiului terţului exclus are ca rezultat practicarea incorectă a logicii. O cerinţă intrinsecă a criticii formalismului este recunoaşterea faptului că justificarea (de conţinut) a matematicii formaliste prin demonstraţia necontradicţiei sale ar conţine un cerc vicios; această justificare se bazează pe validitatea (concretă) a afirmaţiei că din necontradicţia unei propoziţii decurge validitatea acestei propoziţii, adică se bazează pe validitatea (concretă) a principiului terţului exclus[26].

Abordarea intuiţionistă a obiectului matematic va fi una de tip *constructiv*. Calculul mental este anterior limbajului şi poate fi exprimat ulterior pe cale lingvistică, ceea ce nu este însă nici esenţial, nici obligatoriu, limbajul având rol de simplu însoţitor al construcţiilor matematice nelingvistice. În constructivismul brouwerian primează *experimentarea* adevărului, care abia ulterior poate fi exprimat; cuvintele sau complexele de cuvinte care ar exprima adevăruri nu exprimă aceste adevăruri înainte ca ele să fie experimentate.

Intuiţia de bază a matematicii, aşa numitul *prim act al intuiţionismului*, este un produs al matematicii ca activitate nelingvistică esenţială a minţii, având originea în percepţia unei mişcări a timpului. Este *forma goală a substratului comun al oricărei dualităţi*, născută din scindarea unui moment de viaţă în două lucruri distincte, dintre care unul cedează locul celuilalt, dar este reţinut de memorie, dualitate golită de orice calităţi[27].

Prin ceea ce Brouwer numeşte *al doilea act al intuiţionismului* este recunoscută posibilitatea de a genera noi entităţi matematice, în primul rând în forma succesiunilor care înaintează către infinit p_1, p_2, … , şi care sugerează, aşa cum arată şi Al. Surdu, o categorie de intuiţii de gradul doi, termenii acestor succesiuni care înaintează către infinit fiind aleşi dintre cei deja obţinuţi.

În timp ce teoria intuiţiei are un caracter constructiv, teoria logică a demonstraţiei este supusă unui procedeu distructiv, întrucât asupra ei se manifestă şi de această dată îndoiala brouweriană, care vizează atât demonstraţia de tip indirect (*reductio ad absurdum*) ca metodă universal valabilă, cât şi demonstraţia axiomatică, care ar produce formule care nu sunt întotdeauna valabile. Simpla demonstraţie directă este identică cu dovada sau construcţia intuitivă. Chiar dacă atingerea scopului programului intuiţionist implică proceduri şi concepte destul de dificile, iar legitimitatea lor nu trebuie probată nici pe cale logică şi nici prin formalizare, problema care se pune într-un cadru mai larg este aceea a posibilităţii

[26] L.E.J. Brouwer, *Consideraţii intuiţioniste asupra formalismului*, 1928, fragment reprodus în O. Becker, *op. cit.*, p. 365.

[27] Al. Surdu, *op. cit.*, p. 83.

unei descrieri formale a regularităților care apar în metoda de gândire intuiționistă. Cu alte cuvinte, este vorba de posibilitatea elaborării unei logici a matematicii intuiționiste, deosebită de logica matematică obişnuită şi în cadrul căreia toate tezele intuiționiste să fie respectate.

Problema pe care Brouwer o lasă deschisă este, după cum arată şi Al. Surdu, posibilitatea elaborării unui sistem axiomatic în care să fie evitată deducerea expresiilor care nu sunt universal valabile. Încercările ulterioare în această privință s-au concretizat în două orientări. Pe una dintre aceste două căi, plasată oarecum în acord cu linia lui Brouwer, pornind de la premisa că formalizarea completă a intuiționismului este imposibilă, s-a încercat formalizarea unora dintre ideile acestuia, sistemele obținute pe această cale fiind considerate *simple mijloace auxiliare de comunicare şi ordonare* a rezultatelor deja obținute în matematica intuiționistă. Cea de-a doua abordare s-a dovedit nu numai diferită, dar chiar contrară ideilor lui Brouwer, urmărind o formalizare *totală* a intuiționismului, prin excluderea ca inexact a tot ceea ce nu poate fi formalizat, sau o reinterpretare formalistă a ideilor intuiționiste, care îşi pierd astfel specificul, considerându-se că sistemele astfel obținute ar reprezenta intuiționismul propriu-zis. De fapt, această orientare este în mod evident de natură formalistă şi poate fi numită, aşa cum arată Al. Surdu, *formalism neointuiționist*.

Având în vedere particularitățile doctrinei intuiționiste, S. Körner consideră că logica intuiționistă este un bilanț *post factum* al principiilor de raționament care au fost utilizate în construcțiile matematice. Față de logicism, în care principiile de raționament sunt formulate ca reguli față de care sistemul trebuie să se conformeze, iar matematica este justificată prin apelul la logică, intuiționismul admite că viitoarele construcții matematice, care fiind intuitive nu sunt problematice, ar putea încorpora principii până atunci neformulate şi neprevăzute, în fapt fiind vorba de o justificare a logicii făcând apel la construcții matematice. Astfel că obiectul preocupărilor intuiționismului nu este logica în general, ci logica matematică, nu cu sensul de logică generală matematizată, ci ca formulare de principii întrebuințate în construcția matematică[28]. În această privință, S. Körner este de părere că sistemele formale, produse de către intuiționişti care au fost şi sunt obiecte ale cercetării metamatematice, sunt considerate chiar de către aceştia ca subproduse lingvistice ale activității esențialmente independente de limbaj a matematicii şi având într-un fel mai mult o valoare pedagogică. În acelaşi timp, din punct de vedere formal, lăsând deoparte orice interpretare intenționată a simbolurilor, formulelor şi regulilor de transformare, se poate vorbi de logica intuiționistă ca un subsistem al logicii clasice, mai ales în cazul unor sisteme formale care au fost construite *inter alia* de a izola principiile şi regulile de inferență intuiționiste din clasa mai largă a principiilor şi regulilor adoptate de logicieni clasici şi neintuiționişti[29].

Revenind asupra tezelor fundamentale ale intuiționismului, se poate menționa în concluzie că încercările concrete de formalizare s-au bazat numai pe anumite teze, care, rupte de contextul lor, şi-au pierdut uneori semnificația originară, ceea

[28] S. Körner, *op. cit.*, p. 173.
[29] *Ibidem*, p. 174.

ce lasă posibilitatea ca sistemele altfel construite să producă consecințe contrare doctrinei intuiționiste. De aici a rezultat necesitatea elaborării prealabile a unei *teorii logice intuitive* a matematicii intuiționiste, a cărei fundamentare să rezide în respectarea strictă a *tuturor* tezelor intuiționiste. În favoarea unei astfel de teorii pledează şi logicianul român Al. Surdu, care, în lucrarea *Elemente de logică intuiționistă* (1976), încearcă să demonstreze tocmai posibilitatea unei astfel de teorii intuitive, urmând liniile directoare trasate chiar de Brouwer şi având ca reper respectarea *paralelismului matematico-lingvistic*. Chiar dacă teoria intuitivă, în forma expusă în lucrarea citată, nu este completă, aşa cum notează chiar autorul, ea poate fi dezvoltată, deosebit de interesante fiind restricțiile cu privire la raționamente şi formule perfect valabile, dar fără semnificație intuiționistă.

> Întreaga teorie, în genere, oferă un tablou cu totul original față de cel obişnuit din matematică. În ciuda faptului că pentru matematicianul intuiționist nu prezintă un interes special, teoria intuitivă oferă logicianului un teren de investigație destul de rodnic[30].

Reprezentative pentru studiul logicii intuiționiste, din perspectiva formalizării acesteia, sunt încercările de formalizare a calculului logic intuiționist de către Arend Heyting (1930). Acestea vor fi prezentate în continuare din perspectiva logicilor polivalente.

LOGICA INTUIȚIONISTĂ CA LOGICĂ POLIVALENTĂ

Aşa cum am menționat în capitolul referitor la logica intuiționistă, reprezentative pentru studiul acesteia, din perspectiva formalizării, sunt încercările de formalizare a calculului logic intuiționist de către Arend Heyting (1930). Înscriindu-se pe linia doctrinei intuiționiste a independenței matematicii de limbaj, care, prin consecințele sale, nu admitea posibilitatea construirii unui sistem formal încheiat şi final, Heyting nu are pretenția ca raționamentul matematic să fie limitat pentru totdeauna la argumente de tipul celor prezentate în formalizarea sistemului său axiomatic. De altfel, Heyting nu a fost singurul care a încercat construcția unei logici intuiționiste însă, având în vedere că şi-a început activitatea ştiințifică cu lucrări de matematică intuiționistă, încercarea sa vine oarecum din interiorul intuiționismului. Deşi direcția cercetărilor sale în domeniu nu a fost strict direcționată pe linia inaugurată de Brouwer, sistemul său avea să fie acceptat de Brouwer ca un rezumat corect al principiilor logice utilizate în matematica intuiționistă la vremea respectivă[31]. Linia inaugurată şi urmată de Heyting este cea a interpretării intuiționiste a geometriei proiective, o cale care duce în mod firesc la problema axiomatizării intuiționiste a geometriei şi în general la problema unui sistem axiomatic de tip intuiționist, ceea ce, după cum notează şi Al. Surdu, nu intra în preocupările celorlalți intuiționişti[32].

---

[30] Al. Surdu, *op. cit.*, p. 163.
[31] W. Kneale, M. Kneale, *Dezvoltarea logicii*, vol. II, Editura Dacia, Cluj, 1975, p. 314.
[32] Al. Surdu, *Elemente de logică intuiționistă* …, p. 36.

Expunerea sistemului de logică intuiţionistă al lui Heyting, notat simbolic „Σ_{Hy}”, este precedată de unele precizări care urmăresc acordul cu tezele intuiţioniste fundamentale. În concordanţă cu primele trei din aceste teze, expuse anterior, Heyting precizează că matematica intuiţionistă, fiind o activitate pentru care, în mod exclusiv, orice limbaj nu este decât un mijloc auxiliar de comunicare, construcţia unui sistem formal echivalent cu logica intuiţionistă este principial imposibilă, căci posibilităţile gândirii nu pot fi reduse la un număr finit de reguli stabilite în prealabil. În plus, reconstrucţia matematicii nu ar necesita stabilirea unor legi logice universal valabile, întrucât aceste legi sunt redescoperite în fiecare caz particular ca fiind valabile, sau nu, în funcţie de domeniul în care se lucrează, ceea ce aminteşte de conţinutul tezei (IV). În aceste condiţii, scopul încercării de a reda cele mai importante părţi din matematică într-un limbaj formalizat rămâne acela de a profita de avantajele evidente ale simbolismului faţă de limbajul uzual. Cu toate acestea, Heyting construieşte un sistem pe care el însuşi îl numeşte formalist; în plus, aşa cum remarcă şi Al. Surdu, nu porneşte această construcţie pornind de la fundamentele intuiţioniste, matematica intuiţionistă şi tezele pe care aceasta le implică, ci de la rezultatele obţinute de către M.V. Glivenko, care elaborase anterior un al doilea sistem axiomatic intuiţionist[33].

O particularitate a sistemului Σ_{Hy} o constituie semnificaţia constantelor şi variabilelor care, spre deosebire cele obişnuite, ar desemna *percepţii matematice*. În plus, operaţiile calculului intuiţionist au altă semnificaţie decât cea formalistă; în primul rând, ele nu pot fi definite unele prin altele, cum de exemplu în logica lui Russell implicaţia şi conjuncţia erau introduse cu ajutorul negaţiei şi disjuncţiei prin echivalenţe. Cât priveşte echivalenţele corespunzătoare logicii bivalente, în sistemul intuiţionist acestea nu mai au loc.

NOŢIUNILE PRIMITIVE ALE SISTEMULUI Σ_{Hy} [34]

Conjuncţia „$\wedge$”, $p \wedge q$ se citeşte „*p* şi *q*” poate fi asertată dacă şi numai dacă atât *p* cât şi *q* pot fi asertate.

Disjuncţia „$\vee$”, $p \vee q$ se citeşte „*p* sau *q*” poate fi asertată dacă şi numai dacă cel puţin una din propoziţiile *p* sau *q* poate fi asertată. Spre deosebire de disjuncţia clasică, disjuncţia în cazul intuiţionismului reprezintă o comunicare incompletă a unei afirmaţii care spune că *p* are loc sau *q* are loc sau, cel puţin, care dă o metodă prin care să putem alege care dintre cele două propoziţii – *p* şi *q* – are loc.

Negaţia „$\neg$”,$\neg p$ se citeşte „non-*p*” sau „*p* este absurd” şi exprimă faptul că o contradicţie *q* şi non-*q* rezultă din *p* printr-un raţionament intuiţionist, sau mai explicit, că cineva posedă o metodă care, dintr-o demonstraţie a lui *p*, ne furnizează o demonstraţie a unei contradicţii *q* şi non-*q*.

Implicaţia „$\supset$”, $p \supset q$ se citeşte „*p* implică *q*” sau „dacă *p*, atunci *q*” şi exprimă faptul că printr-un raţionament intuiţionist din *p* rezultă *q*, sau mai explicit,

[33] *Ibidem*.
[34] A. Heyting, *Intuitionism – An Introduction*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1956, pp. 97–99.

că cineva posedă o metodă prin care din orice demonstrație a lui p se poate obține o demonstrație a lui q.

Literele a, b, c … vor simboliza propoziții. Pentru delimitarea razei de acțiune, în cadrul formulelor sunt utilizate puncte, iar pentru echivalență Heyting utilizează semnul implicației reciproce „$\supset\subset$”.

Semnul „$\vdash$” este utilizat ca semn de aserțiune, şi se pune în fața unor propoziții demonstrate. În cazul axiomelor, care sunt admise fără demonstrație, inițial Heyting a folosit semnul pentru aserțiune dublat „$\vdash\vdash$”, la care apoi a renunțat folosind în ambele cazuri semnul pentru aserțiunea simplă.

AXIOMELE SISTEMULUI Σ_{Hy}

($A_{2.1}$) $\vdash\vdash .a\supset a\wedge a$

($A_{2.11}$) $\vdash\vdash .a\wedge b\supset b\wedge c$

($A_{2.12}$) $\vdash\vdash .a\supset b.\supset .a\wedge c\supset b\wedge c$

($A_{2.13}$) $\vdash\vdash .\ a\supset b.\wedge b\supset c.\supset .a\supset c$

($A_{2.14}$) $\vdash\vdash .b\supset .a\supset b$ dacă b este adevărat, atunci b este implicat de orice propoziție a.

($A_{2.15}$) $\vdash\vdash .a\wedge .a\supset b.\supset b$ dacă a este adevărat şi a implică b, atunci b este adevărat.

($A_{3.1}$) $\vdash\vdash\ a\supset a\vee b$

($A_{3.11}$) $\vdash\vdash\ a\vee b\supset b\vee a$

($A_{3.12}$) $\vdash\vdash .a\supset c.\ \wedge .b\supset c.\supset .\ a\vee b\supset c$

($A_{4.1}$) $\vdash\vdash .\ \neg a\supset .a\supset b$ dacă o operație este falsă „$\neg a$”, atunci ea implică orice propoziție b

($A_{4.11}$) $\vdash\vdash .a\supset b.\ \wedge .a\supset\neg b.\ \supset\neg a$ dacă a implică b şi, în acelaşi timp, a implică $\neg b$, atunci a este falsă sau dacă dintr-o propoziție se pot deriva două propoziții contradictorii, atunci ea este falsă.

Axioma ($A_{2.14}$) exprimă *principiul silogismului*. Din aceste axiome, printr-un şir de operații simple, se pot obține teoremele. Ca reguli de operare sunt utilizate următoarele reguli: *adjuncția*, *modus ponens* şi regula de *substituție*.

Dacă a şi b, atunci $a\wedge b$ este adevărată (*adjuncția*)

Dacă a şi $a\supset b$ sunt adevărate, atunci şi b este adevărat (*modus ponens*)

$\left(\dfrac{p}{x}\right)$ a indică înlocuirea în formula a variabilei x prin semnul p (*substituția*)

Formula $a=_D b$ este o definiție. O definiție permite înlocuirea unei formule într-o altă formulă în care figurează primul membru al definiției cu prin al doilea membru al definiției şi invers chiar dacă membrii definiției sunt formule întregi.

2.01 $.a\supset\subset b=_D .\ a\supset b.\ \wedge .b\supset a$

Semnul pentru echivalență „$\supset\subset$” este definit ca implicație reciprocă a două propoziții; a spune că două propoziții sunt *echivalente* înseamnă a spune că prima propoziţie o implică pe a doua şi, în acelaşi timp, a doua propoziţie o implică pe prima.

Independenţa axiomelor este demonstrată de către Heyting prin intermediul metodei lui P. Bernays. În primă instanţă sunt căutate *elementele matematice*, cum ar fi numerele întregi, care sunt grupate, aceste elemente devenind ulterior valori ale unor *matrici arbitrare*. Pe baza acestor matrici arbitrare se arată că una dintre axiome nu obţine aceeaşi valoare constantă pe care o obţin toate celelalte[35].

Pentru a demonstra independenţa axiomei ($A_{2.1}$), Heyting alege ca elemente cifrele: 0, 1, 2 şi alcătuieşte următoarele matrice arbitrare:

(I) $\supset$	0	1	2	$\wedge$	0	1	2	$\vee$	0	1	2	$\neg$	0	1	2
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0		1	0	1
1	2	0	2	1	1	1	1	1	0	1	2				
2	2	0	0	2	1	1	1	2	0	2	2				

Pentru a demonstra independenţa axiomei ($A_{2.14}$) alege aceleaşi elemente, dar alte matrici arbitrare, şi anume:

(V) $\supset$	0	1	2	$\wedge$	0	1	2	$\vee$	0	1	2	$\neg$	0	1	2
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0				
2	1	0	1	2	0	1	0	2	0	0	0				

Pentru a demonstra independenţa axiomei ($A_{2.11}$) alege ca elemente pe 0 şi toate numerele întregi pozitive; pentru ($A_{2.12}$) alege pe 0 şi toate numerele întregi pozitive şi negative ş.a.m.d. Prin aceeaşi metodă, alegând elementele 0, 1, 2 şi matricele arbitrare:

(V) $\supset$	0	1	2	$\wedge$	0	1	2	$\vee$	0	1	2	$\neg$	0	1	2
0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0		1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	2				
2	2	0	0	2	2	1	2	2	0	2	2				

Pentru a evidenţia diferenţa dintre calculul intuiţionist şi cel obişnuit vom reda în continuare câteva teoreme referitoare la *negaţie* „¬” şi la *terţul exclus*[36].

[35] Al. Surdu, *op. cit.*, p. 38.
[36] A. Dumitriu, *Logica polivalentă* ..., pp. 221–223.

4.01 $\vdash .\neg\neg a =_D . \neg(\neg a)$

4.2 $\vdash .a \supset b. \supset . \neg b \supset \neg a$ (regula *transpoziției* față de implicație)

4.24 $\vdash .a \supset b. \wedge \neg b. \supset \neg a$ dacă *a* implică *b* şi în acelaşi timp *b* este fals, atunci *a* este fals

4.3 $\vdash .a \supset \neg\neg a$ o propoziție absurdă *a* implică dubla absurditate a lui *a* (*axioma lui Brouwer*)

4.4. $\vdash .a \wedge \neg a \supset b$

4.45 $\vdash .a \vee \neg a. \supset .\neg\neg a \supset a$ dacă pentru o propoziție *a* principiul *terțului exclus* (prima parte a formulei „$a \vee \neg a$”) este valabil, atunci este valabilă pentru acea propoziție şi $\neg\neg a \supset a$, care este conversa *axiomei lui Brouwer*.

4.8. $\vdash .\neg\neg(a \vee \neg a)$

4.81 $\vdash .\neg\neg(\neg\neg a \supset a)$

4.82 $\vdash . a \vee \neg a \supset b. \supset .\neg\neg b$

4.83 $\vdash . a \vee \neg a \supset \neg b. \supset .\neg b$ *principiul terțului exclus poate fi utilizat totdeauna în demonstrația unei propoziții negative.

4.9 $\vdash . a \supset b. \supset \neg(a \vee \neg b)$

4.91 $\vdash . a \vee b. \supset \neg(\neg a \vee \neg b)$

4.92 $\vdash . a \wedge b. \supset \neg(\neg a \vee \neg b)$

Cele trei valori care se pot atribui propozițiilor sunt: *adevărat* (**0**), *fals* (**1**) şi o a treia valoare – valoarea unei propoziții care nu poate fi falsă, dar al cărei adevăr nu este dovedit (**2**). În acest sens, sistemul lui Heyting este o *logică trivalentă*. Scopul este ca toate teoremele demonstrate să fie tautologii în raport cu matricele conectorilor redate mai jos. A. Dumitriu remarcă faptul că pentru atingerea acestui deziderat era suficient ca: 1) cele 11 axiome să fie tautologii, 2) matricea conjuncției să fie astfel definită încât $0 \wedge 0 = 0$ şi 3) matricea implicației să fie astfel definită încât $0 \supset b = 0$ numai atunci când $b = 0$.[37]

Negația ($\neg$)

a	0	1	2
$\neg a$	1	0	1

Conjuncția ($\wedge$)

$a \wedge b$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

Disjuncția ($\vee$)

$a \vee b$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

Implicația ($\supset$)

$a \supset b$	0	1	2
0	0	1	2
1	0	0	0
2	0	1	0

[37] *Ibidem*, pp. 224–226.

În matricea implicației, valorile antecedentului sunt trecute pe prima coloană din stânga, iar cele ale consecventului pe primul rând de sus. Analog sunt şi valorile pentru ceilalți conectori. În tabelele matriceale redate mai sus, celulele evidențiate cu altă culoare indică pentru fiecare conector submatricea corespunzătoare situațiilor pentru care aceştia iau numai valorile *adevărat* şi *fals*.

Din analiza matricei implicației se poate observa că submatricea evidențiată prin altă culoare coincide cu implicația clasică, ceea ce înseamnă că definiția matricială dată implicației de Heyting este o generalizare a celei clasice. Din aceeaşi matrice reiese că adevărul este implicat de orice, inclusiv de o propoziție care are valoarea 2, şi falsul implică orice, inclusiv o propoziție care are valoarea 2. După cum poate observa, în afară de situația $0 \supset 1$, rămân două cazuri în care implicația nu este adevărată:

– când ambii termeni iau valoarea 2, iar implicația $2 \supset 2$ are valoarea 2 (ceea ce corespunde interpretării semnificației dată valorii 2);

– când antecedentul are valoarea 2, iar consecventul valoarea 1.

Acest al doilea caz, remarcă A. Dumitriu, este singurul în care matricea lui Heyting diferă de cea a lui Łukasievicz[38].

Redăm în tabelele de mai jos matricele functorilor fundamentali din sistemul logicii trivalente a lui Jan Łukasievicz, în cazul cărora cele trei valori de adevăr: adevărat (1), fals (0) şi posibil (½). Pentru compararea corectă a matricelor celor două sisteme trebuie ținut seama de faptul că, în sistemul lui Heyting, simbolurile pentru valorile clasice de adevăr sunt inversate, acesta atribuind pentru *adevărat* semnul **0**, pentru *fals* semnul **1** şi semnul **2** pentru a treia valoare specifică sistemului de calculul intuiționist, explicitată mai sus. De asemenea, ca şi în cazul matricelor sistemului lui Heyting am indicat prin altă culoare submatricele corespunzătoare valorilor clasice bivalente.

Negația (*N*)

p	*Np*
1	0
0	1
½	½

Conjuncția (*K*)

K	1	0	½
1	1	0	½
0	0	0	0
½	½	0	½

Disjuncția (*A*)

A	1	0	½
1	1	1	1
0	1	0	½
½	1	½	½

Implicația (*C*)

C	1	0	½
1	1	0	½
0	1	1	1
½	1	½	1

Matricele conjuncției şi disjuncției coincid şi ele cu generalizările logicianului polonez, diferențele survenind în cazul negației care nu poate fi falsă, dar nici dovedită ca adevărată. Prin intermediul matricelor sistemului lui Heyting se poate calcula valoarea de adevăr a oricărei formule atunci când variabilelor propoziționale ale acestora li s-au atribuit anumite valori de adevăr.

În cazul axiomelor se poate calcula că toate cele 11 axiome sunt tautologii, iar cu aceasta se poate considera că cele trei condiții enumerate mai sus sunt

[38] *Ibidem*, p. 225.

îndeplinite în sistemul lui Heyting. Astfel, consideră A. Dumitriu, putem conchide că orice teoremă intuiţionistă, adică orice formulă demonstrabilă în logica lui Heyting, este o tautologie faţă de matricele sale trivalente[39]. Nu toate legile logicii clasice sunt tautologii în sistemul intuiţionist; pe lângă principiul terţului exclus şi legea dublei negaţii deja amintite, îşi pierd valabilitatea şi alte legi, cum sunt: transpoziţia, echivalenţa materială, una din legile lui De Morgan ş.a.

Cu ajutorul matricelor astfel obţinute se poate demonstra, aşa cum arată şi A. Dumitriu, că în sistemul intuiţionist al lui Heyting principiul terţului exclus nu poate fi demonstrat ca teoremă[40]. Principiului terţului exclus este exprimat prin formula $a \vee \neg a$. Conform matricelor negaţiei şi disjuncţiei, în formula $a \vee \neg a$, pentru $a = 2$ se obţine $2 \vee \neg 2 = 2 \vee 1 = 2$, ceea ce înseamnă că $a \vee \neg a$ nu este tautologie.

În cazul *dublei negaţii* $\neg\neg a$, întrucât $\neg\neg a$ este adevărată, iar adevărul lui a nu poate fi demonstrat, din $\neg\neg a$ nu se poate deduce a, ceea ce înseamnă că nici dubla negaţie nu este lege logică. În acest sens, din perspectiva logicii lui Russell, prin legea dublei negaţii se înţelegea echivalenţa $p \equiv \sim(\sim p)$, care putea, în logica bivalentă, fi descompusă în două implicaţii: $p \supset \sim(\sim p)$ şi $\sim(\sim p) \supset p$. Prin transpunerea acestora în logica lui Heyting, prima se regăseşte sub forma teoremei 4.3 $\vdash .a \supset \neg\neg a$, în timp ce a doua, $\neg\neg a \supset a$, nu apare în lista propoziţiilor adevărate. Matriceal pentru cazul în care a ia valoarea 2, $\neg\neg a \supset a$ va avea valoarea: $\neg\neg 2 \supset 2 = \neg 1 \supset 2 = 0 \supset 2 = 2$.

Din această privinţă, o comparaţie la nivel general a logicii intuiţioniste cu logica clasică, având în vedere cel puţin aspectul neacceptării principiului terţului exclus în cea dintâi, poate duce la constatarea că aceasta este constituită într-un fel ca o parte a logicii clasice. A. Dumitriu aminteşte în această direcţie de O. Becker, care traducând conectorii logicii intuiţioniste în cei ai logicii bivalente a lui Russell, a constatat că toate teoremele intuiţioniste devin tautologii (deci teoreme) ale logicii bivalente[41]. În plus, în ipoteza că s-ar putea face abstracţie de semnificaţiile diferite acordate operatorilor logici, ar reieşi că principiile valabile în logica intuiţionistă îşi păstrează acest caracter şi în logica clasică, fără ca reciproca să fie valabilă.

Dificultatea demersului comparativ al celor două tipuri de logică apare odată cu faptul că logica lui Heyting este una trivalentă şi, aşa cum remarcă şi A. Dumitriu, nu toate formulele valide în această interpretare (tautologice în raport cu calculul matriceal al lui Heyting) pot fi deduse din cele 11 axiome ale logicii intuiţioniste. În acest sens, se poate spune că sistemul este *incomplet* în raport cu această interpretare.

K. Gödel este cel care întreprinde primele interpretări, din perspectivă pur formalistă, ale logicii intuiţioniste. Pornind de la premisa că nu există o interpretare prin matrice *finite* de adevăr pentru expresiile calculului sistemului Σ_{Hy}, Gödel consideră la nivel metalogic că între Σ_{Hy} şi Σ_C (sistemul clasic) ar exista un număr infinit de alte sisteme. Interpretările metalogice de tip formalist ale sistemului Σ_{Hy}, aşa cum precizează şi Al. Surdu, nu contravin cu nimic teoriei intuitive a logicii

[39] *Ibidem*, p. 225.
[40] *Ibidem*, p. 228.
[41] *Ibidem*, p. 235.

intuiţioniste, din punct de vedere intuiţionist, fiind dovedită posibilitatea elaborării unei teorii intuitive în varianta lui Brouwer, în care să nu se opereze cu valori de adevăr. Din perspectivă formalistă se demonstrează că una dintre sistematizările formale ale acestei logici, sistemul Σ_{Hy}, conţine expresii care nu pot fi interpretate valoric[42].

Încercând transcrierea expresiilor intuiţioniste în termeni uzuali ai logicii propoziţiilor şi adăugând sistemului clasic Σ_C conceptul „*p* este demonstrabil”, notat „B*p*”, Gödel consideră că sistemul Σ_{Cb} astfel obţinut poate fi dedus din sistemul calculului intuiţionist Σ_{Hy} prin transcrierea conceptelor de bază. În măsura în care Σ_{Cb} nu urmează transcrierea formulei $p \vee \sim p$, trecerea în sens invers, de la Σ_{Cb} la Σ_{Hy} nu este posibilă. Corespondenţele obţinute prin transcriere sunt următoarele:

$$
\begin{array}{rl}
\sim p & \sim \mathrm{B}p \\
p \supset q & \mathrm{B}p \rightarrow \mathrm{B}q \\
p \vee q & \mathrm{B}p \vee \mathrm{B}q \\
p \wedge q & \mathrm{B}p \,\&\, \mathrm{B}q
\end{array}
$$

Importanţa contribuţiei lui Gödel, subliniază Al. Surdu, constă în punerea în evidenţă a faptului că nu este suficientă excluderea arbitrară a legii terţului exclus pentru ca Σ_{Cb} să devină Σ_{Hy}, ci pentru aceasta ar fi necesară şi o interpretare specială a variabilelor. Interpretarea prin intermediul conceptului „*p* este demonstrabil” (B*p*) este, după părerea lui Al. Surdu, destul de vagă, întrucât sugerează excluderea din cadrul sistemului clasic Σ_C a tuturor propoziţiilor care nu pot fi demonstrate sau negarea lor (~B*p*), nespecificându-se dacă este vorba despre propoziţii matematice sau despre propoziţii obişnuite. În plus, ar rămâne deschisă problema propoziţiilor care nu sunt nici B*p*, nici ~B*p*, care, la rândul ei creează anumite dificultăţi. Pentru evitarea lor, meţionează Al. Surdu, Gödel consideră că Σ_{Cb} ar fi echivalent cu sistemul implicaţiei stricte al lui Lewis, în condiţiile în care B*p* ar fi interpretat ca „este necesar *p*” ($\Box p$) adăugând totodată sistemului axioma 9. adăugată de Becker celor şapte axiome ale sistemului lui Lewis S_3, obţinându-se sistemul S_4: *necesitatea implică strict necesitatea necesităţii* $\Box p \prec \Box\Box p$[43].

Ceea ce prezintă însă interes din punct de vedere logic în cazul rezultatelor lui K. Gödel, aşa cum arată şi Al. Surdu, este încercarea acestuia de a transcrie operaţiile clasice în operaţii intuiţioniste, nu în mod direct, prin intermediul operatorilor analogi („→” / „⊃”, „V” / „∨”, „&” / „∧” şi „~” prin „¬”), ci prin intermediul altor operaţii clasice echivalente, exceptând negaţia şi conjuncţia care sunt identice, şi care sunt transcrise direct[44]. În acest mod se obţin următoarele formule:

$$
\begin{array}{cc}
\neg p & \neg p \\
p \rightarrow q & \neg(p \wedge \neg q) \\
p \vee q & \neg(p \wedge \neg q) \\
p \,\&\, q & p \wedge q
\end{array}
$$

[42] Al. Surdu, *op. cit.*, p. 105.
[43] *Ibidem*, p. 106.
[44] *Ibidem*, p. 111.

Gödel a constatat că toate tezele logicii clasice care conțin numai negația şi conjuncția sunt valabile în logica intuiționistă. Inclusiv terțul exclus, $p \vee \neg q$, s-ar regăsi ca teoremă intuiționistă, conform abrevierilor de mai sus, în formula: $\neg(\neg p \wedge \neg\neg q)$, care poate fi dedusă, cu ajutorul teoremelor 4.44. şi 4.2, din teorema 4.8. Orice formulă clasică poate fi transcrisă în maniera logicii de tip intuiționist, atât timp cât o formulă este adevărată în logica formalistă, va fi valabilă intuiționistic şi transcrierea ei. Redăm mai jos legea terțului exclus şi dubla negație care transcrise în acest mod devin valabile din punct de vedere intuiționist:

$p \vee \sim p$	$\neg(\neg p \wedge \neg\neg p)$	*tertium non datur*
$\sim\sim p \rightarrow p$	$\neg(\neg\neg p \wedge \neg p)$	*duplex negatio*

Rezultatele cercetărilor comparative ale lui Kurt Gödel readuc în atenția cercetătorilor din domeniu ideea că logica de tip intuiționist include logica formalistă. Valoarea acestor rezultate însă, consideră Al. Surdu, nu ar fi decât una din perspectivă *pur formalistă*, ceea ce nu este însă de neglijat cel puțin din această perspectivă.

> Cu toate acestea, articolul lui Gödel a oferit formaliştilor o nouă problemă, respectiv aceea de a hotărî *care din cele două logici* (intuiționistă sau formalistă) *o conține pe cealaltă*. Posibilitatea apariției unei astfel de probleme este garantată de interpretarea pur formalistă logicii intuiționiste[45].

O cercetare mai amănunțită din acest punct de vedere a fost întreprinsă de către Jan Łukasievicz, interesul față de această problemă fiind amplificat de concepția sa asupra logicii, care, aşa cum notează şi A. Dumitriu, nu este pentru logicianul polonez o ştiință a legilor gândirii sau al legilor vreunui alt obiect real, ci un instrument care ne permite să derivăm din anumite premise anumite concluzii[46]. O astfel de perspectivă asupra logicii pare mult mai deschisă spre construcțiile propuse sub forma altor sisteme logice decât sistemul clasic bivalent, o dovadă certă în acest sens fiind logica trivalentă pe care o propune în studiul modalităților. Plasat într-un astfel de orizont, pare oarecum firesc interesul pentru soluția de tip intuiționist pe care o consideră mai bogată şi prin urmare mai puternică decât cea clasică.

Pornind de la ideea că un sistem formalist care, în virtutea identității variabilelor şi operatorilor, ar conține numai *conjuncția* şi *negația*, ar fi un sistem intuiționist, a proba această teză, Łukasievicz construieşte mai multe sisteme corespunzând sistemului logicii de tip intuiționist. Este vorba de un sistem intuiționist echivalent cu Σ_{Hy}, care poate fi notat, după Al. Surdu, cu Σ_{Li}, un sistem parțial intuiționist care conține numai conjuncția şi negația, notat în aceeaşi manieră Σ_{Lp}, precum şi un sistem Σ_{Lc}, bazat numai pe implicație şi negație, identificat cu teoria clasică a deducției. Al. Surdu arată că aceste sisteme sunt

[45] *Ibidem*, p. 113.
[46] A. Dumitriu, *op. cit.*, p. 239.

precizări prin mijloace axiomatice ale rezultatelor lui Gödel, în sensul că „logica formalistă (clasică), respectiv Σ_{Lc} (redată prin negaţie şi implicaţie), este o parte a unei părţi Σ_{Lp} (negaţie şi conjuncţie) a logicii intuiţioniste, respectiv a sistemului Σ_{Hy}”.[47]

Łukasievicz reformulează sistemul axiomatic al calculului intuiţionist propus de Heyting, propunând pentru Σ_{Hy} 10 axiome faţă de cele 11 cuprinse în varianta originală. Acestea sunt exprimate folosind propria simbolistică, în cadrul căreia, pentru a reda conectorii sistemului intuiţionist, utilizează următoarele notaţii, diferite faţă de cele ale functorilor propriului sistem: „*T*” pentru conjuncţie, „*F*” pentru implicaţie, „*O*” pentru disjuncţie, iar semnul pentru negaţie „*N*” este păstrat. Transcrise în această simbolistică, axiomele propuse de Łukasievicz sunt redate mai jos.

1. *FqFpq*
2. *FFpFqrFFpqFqr*
3. *FTpqp*
4. *FTpqq*
5. *FpFqTpq*
6. *FpOpq*
7. *FqOpq*
8. *FFprFFqrFOpqr*
10. *FpFNpq*

Din cele 10 axiome, utilizând ca reguli de inferenţă *substituţia* şi *modus ponens*, pot fi deduse exclusiv, aşa cum menţionează şi A. Dumitriu, toate teoremele lui Heyting. Ceea ce remarcă şi autorul român, cu privire la rezultatul obţinut de Łukasievicz, este proprietatea deosebită a sistemului, în care nicio teoremă din care lipseşte vreunul dintre cele patru simboluri nu necesită pentru demonstraţie utilizarea vreunei axiome din grupul din care acest simbol nu este prezent[48]. Fără a intra aici în detaliile concrete ale demonstraţiilor, este de reţinut că logicianul polonez indică anumite legături între conectorii logicii clasice bivalente şi cei de tip intuiţionist, pe care le include în demersul său de reformulare a sistemului lui Heyting. Pentru exprimarea acestor legături foloseşte unele artificii menite să asigure compatibilitatea între cele două tipuri de conectori, astfel încât aceştia să poată opera în acelaşi sistem. Astfel, înlocuind functorul *C* (care în acest caz nu mai are semnificaţia din sistemul logicii trivalente, ci desemnează implicaţia russelliană) în funcţie de conectivele intuiţioniste *T* şi *N*, cu ajutorul cărora a fost definit, şi utilizând ca reguli de deducţie tot substituţia şi *modus ponens*, logicianul polonez reuşeşte să demonstreze că toate teoremele sistemului astfel construit devin teoreme intuiţioniste. În plus, aşa cum remarcă şi A. Dumitriu, teoremele în *C* şi *N* sunt toate teoreme clasice în implicaţia russelliană şi în negaţia bivalentă. Autorul român consideră că, în acest fel, s-ar putea obţine chiar toate teoremele

[47] Al. Surdu, *op. cit.*, p. 114.

[48] A. Dumitriu, *op. cit.*, p. 240.

logicii clasice. Pentru exemplificare, A. Dumitriu indică definirea conjuncției şi disjuncției din logica bivalentă, notate cu simbolurile lui Łukasievicz „*K*” şi „*A*”, în funcție de functorii *C* şi *N*, explicitați mai sus. *Kpq* va fi scris *NCpNq*, iar *Apq*, *CNpq,* definiții inspirate din echivalențele clasice care indică posibilitatea transformării implicației în sume sau în negații de produse logice: 4.63 $\vdash$: $\sim(p \supset \sim q).\equiv . p.q$ respectiv 4.64 $\vdash : \sim p \supset q.\equiv .p \vee q.$

Concluzia lui Łukasievicz este că teoria clasică a deducției este inclusă în cea intuiționistă, iar legăturile dintre conectorii celor două tipuri de logică, exceptând negația, care este comună în ambele, sunt de genul relației de implicație în sens intuiționist, în care conectorii intuiționişti implică intuiționist pe cei clasici corespunzători, fără ca vreuna din reciprocele acestor relații de implicație să fie valabile. În acest sens, există o diferență de „putere” între cele două tipuri de conectori, functorii clasici *C*, *K*, *A* fiind mai slabi decât cei corespondenții lor în sens intuiționist, ceea ce înseamnă că la nivelul principiilor se poate vorbi de un sens în legătură cu acestea: un sens „tare” şi unul „slab”. A. Dumitriu exemplifică indicând pentru principiul în sens tare al terțului exclus expresia „*OpNp*” neacceptată de intuiționişti, care, în schimb, ar fi constrânşi să accepte formularea în sens slab „*ApNp*”, atâta timp cât aceasta din urmă este acceptată ca teză în sistemul lui Heyting[49]. Ceea ce trebuie însă precizat aici, este că înțelesul principiului terțului exclus formulat ca „*ApNp*” depinde de înțelesul acordat functorilor disjuncție (*A*) şi negație (*N*) prin care este exprimat. În acest sens, A. Dumitriu notează:

> Este discutabil faptul că în interpretarea lui Gödel negația intuiționistă şi cea clasică se confundă, părând a urma de aici că nu există de fapt între ele nici o deosebire de sens. Căci, după cum am văzut, negația este însuşi punctul sensibil atacat de Brouwer în discuția terțului exclus. Această lacună o vor umple […] interpretările modale, unde $\neg$, negația intuiționistă, devine imposibilitatea lui Lewis $\Diamond \sim$.[50]

Consecințele ce decurg din includerea logicii clasice în logica intuiționistă privind admiterea într-o formă sau alta a ideii că legea terțului exclus poate fi demonstrată în teoria deducției duc, aşa cum arată Al. Surdu, la rezultate contradictorii:

> […] legea terțului exclus este o formulă din sistemul Σ_{Lc}, în care disjuncția este transcrisă prin implicație conform relației $(\sim p \vee p) = (p \rightarrow p)$. Or, Σ_{Lc} este o parte a sistemului Σ_{Lp}, iar Σ_{Lp} o parte din Σ_{Hy}, *ergo* legea terțului exclus face parte din Σ_{Hy}. Se ajunge deci la următoarea contradicție: logica intuiționistă include şi exclude în acelaşi timp legea terțului exclus. Contradicția dovedeşte că încercările de acest tip nu sunt valabile decât în momentul în care se renunță la însuşi fundamentul logic al teoriei intuiționiste.[51]

[49] *Ibidem*, p. 242.
[50] *Ibidem*.
[51] Al. Surdu, *op. cit.*, p. 114.

Eşafodajul formalist, continuă Al. Surdu, cade de la sine dacă este interzisă, în mod intuiționist, transcrierea operațiilor logice unele prin altele, concluzionând că jocul transcrierilor, perfect valabil în logica formalistă, duce la complicații dacă este aplicat fără discernământ în logica intuiționistă, prin introducerea unor convenții greu de acceptat atât din punct de vedere intuiționist, cât şi formalist[52].

Cercetările comparative ale sistemelor logicii clasice bivalente cu logica pe care, din considerente de uşurare a limbajului, am numit-o logică intuiționistă, au fost completate de comparații ale acesteia cu logicile modale. Încercările de a interpreta logica intuiționistă în calcule polivalente nu au condus la obținerea de rezultate remarcabile în sensul că nu au reuşit să aducă ceva în plus față de calculele polivalente formaliste.

O interpretare modală a logicii intuiționiste a fost întreprinsă de O. Becker, care încearcă traducerea operatorilor lui Heyting în limbajul utilizat de C.I. Lewis, efectuând următoarele interpretări simbolice: implicația „$\rightarrow$” / „$\supset$”, conjuncția „$\wedge$” / „.”, disjuncția „$\vee$” / „$\vee$”, şi negația „$\neg$” / „$\Diamond\sim$”.

După cum se poate remarca, în traducerea sa, Becker atribuie implicației intuiționiste ceea ce corespunde în sistemul lui Lewis implicației materiale şi implicației stricte, cum s-ar fi părut normal, iar corespondentul negației intuiționiste este imposibilitatea. Prin intermediul acestor traduceri, Becker găseşte că primele zece teze intuiționiste sunt teze în sistemul S_3 al lui Lewis. A. Dumitriu consideră că această corespondență a axiomelor este evidentă pentru primele nouă axiome, întrucât prin traducerea implicației, conjuncției şi disjuncției intuiționiste, axiomele respective devin teze clasice, iar logica bivalentă este inclusă în S_3, arătând că şi ultimele două axiome obținute prin traducere transcrise: 10’. $\sim\Diamond p \supset (p \supset q)$ respectiv 11’. $p \supset q . \supset \sim\Diamond q : \supset . \sim\Diamond p$ sunt valide[53]. În privința axiomei 11’ A. Dumitriu menționează că O. Becker nu ajunsese să probeze adevărul ei şi remarcă faptul că toate cele 11 axiome intuiționiste sunt valabile în sistemul S_1[54].

Alte încercări de interpretare în logica implicației stricte au fost întreprinse şi de către A. Tarski şi McKinsey, aceştia propunând o traducere în care variabilele propoziționale simple au ca prefix simbolul necesității din simbolistica lui Lewis: „p” / „$\Box$”; „$\neg$” / „$\sim\Diamond$” (imposibilitate); implicația intuiționistă „$\rightarrow$”este tradusă prin implicația strictă „$\prec$”. A. Dumitriu menționează că teoremele intuiționiste astfel traduse, care nu conțin operatorii disjuncție şi conjuncție, sunt adevărate în sistemul S_4 al lui Lewis, apreciind acest sistem ca un cadru potrivit pentru o interpretare a logicii intuiționiste[55]. Precizarea făcută în caracterizarea încercărilor formaliste de în privința logicii intuiționiste rămâne valabilă şi în cazurile încercărilor de traducere cu simbolistica sistemelor logicii implicației, şi anume că şi acestea au în vedere sistemul formal construit de Heyting şi nu modul de gândire intuiționist.

Revenind la sensul originar al doctrinei intuiționiste redat în tezele sale fundamentale, care conferă independență absolută matematicii, față de care

---

[52] *Ibidem*, p. 116.

[53] A. Dumitriu, *op. cit.*, p. 244.

[54] *Ibidem*.

[55] *Ibidem*, p. 245.

limbajul şi formalismul matematic nu sunt decât mijloace aproximative şi auxiliare în redarea proceselor matematice, ceea ce numim, într-un fel impropriu intuiţionistic vorbind, *sistem al logicii intuiţioniste* şi încercările de construcţie formală a acestuia, nu se constituie nicidecum în nişte încercări fără obiect.

Sistemul lui Arend Heyting pare a rămâne, până acum, cel mai potrivit pentru logica intuiţionistă. Perspectiva elaborării prealabile unei *teorii logice intuitive* a matematicii intuiţioniste, a cărei fundamentare să rezide în respectarea strictă a *tuturor* tezelor intuiţioniste, rămâne deschisă, oferind logicianului, aşa cum se exprima şi Al. Surdu în această privinţă, un interesant şi „rodnic teren de investigaţie". Atâta vreme cât cercetările asupra logicii intuiţioniste, chiar şi de pe poziţii formaliste au dus la aprecieri de genul celei a lui Jan Łukasievicz, care aprecia teoria intuiţionistă drept cea mai intuitivă şi elegantă printre sistemele logice polivalente cunoscute până în prezent, trimit spre o deschidere mult mai largă decât graniţa pur intuiţionistă ce trasează imposibilitatea principială a oricărui sistem formal de reda în mod adecvat matematica intuiţionistă.