REPERE INTUIȚIONISTE ÎN LOGICA ROMÂNEASCĂ

MARIUS DOBRE

O scurtă reluare a programului teoretic intuiționist ar fi utilă pentru început. Orientarea intuiționistă legată de fundamentele matematicii a evoluat mai ales prin contribuțiile școlii olandeze inițiate de L.E.J. Brouwer, remarcându-se îndeosebi prin atitudinea critică față de formalism și logicism. Fundamentarea matematicii în mod logicist, prin teoria mulțimilor, conduce la paradoxe, matematica fiind independentă de logică. Paradoxele apar datorită confuziei făcute între limbajul matematicii și activitatea matematică însăși (construcția matematică), ce este un act creator al minții umane. Paradoxele țin de limbaj, de exprimarea conținutului matematic, legile limbajului (sau ale logicii) fiind supuse uneori erorii. Pentru matematică nu are importanță dacă limbajul este contradictoriu, ea salvându-se astfel de apariția paradoxelor. Matematica trebuie practicată independent de logică, iar logica independent de matematică. Legile logicii nu sunt universal valabile pentru intuiționiști: de pildă, terțul exclus nu se poate aplica în domeniul transfinitului, unde nu putem verifica dacă o propoziție este adevărată sau falsă.

Concepţia lui Brouwer nu este doar un „antilogicism", ci şi un „antiformalism" ce s-a concretizat în teoria intuiţiei (de la care pleacă şi numele curentului), care presupune că în matematica intuiţionistă nu sunt acceptate decât entităţi matematice şi operaţii cu entităţi construite intuitiv. O teorie matematică intuitiv construită este evidentă şi necontradictorie, orice axiomatizare ulterioară reprezentând doar o descriere şi o sistematizare a expresiilor lingvistice ce corespund rezultatelor matematice obţinute intuitiv în prealabil.

Cele de mai sus pot fi redate în mare parte în „tezele intuiționiste"[1]: „(1) Matematica pură este o activitate *independentă* faţă de limbaj. (2) Obiectul matematicii pure îl constituie construcţiile matematice *intuitive nelingvistice.* (3) Obiectul logicii matematice îl constituie *limbajul* matematic în care sunt exprimate, mai mult sau mai puţin exact, construcţiile matematice. (4) Existenţa matematică efectivă implică *întotdeauna* non-contradicţie logică; non-contradicţia logică *nu implică* însă *întotdeauna* existenţa matematică efectivă. (5) Practicarea unei matematici corecte şi a unei logici corespunzătoare face *imposibilă* apariţia paradoxelor. (6) *Tertium non datur* şi *duplex negatio* nu pot fi universal valabile în cadrul unei logici corecte, dar nu pot fi nici false. (7) Axiomatizarea nu poate fi admisă drept metodă de *construcţie* a teoriilor matematice, ci numai ca *mijloc auxiliar* pentru *descrierea* şi *sistematizarea* teoriilor matematice *preexistente*".

---

[1] Alexandru Surdu, *Elemente de logică intuiționistă*, Editura Academiei Române, București, 1976, p. 19.

În cele ce urmează, vom identifica câteva teorii ce pot conduce către ideea unui filon românesc de gândire logică intuiționistă.

*

Se pare că prima scriere românească în care poate fi identificată o perspectivă intuiționistă a fost lucrarea lui Nae Ionescu, *Die Logistik als Versuch einer neuen Bergründung der Mathematik* (*Logistica – încercare a unei noi fundamentări a matematicii*)[2], care a fost de fapt teza sa de doctorat, susținută în 1919, la Universitatea din München. Suntem în fața unei atitudini antilogiciste, similară cu cea a lui L.E.J. Brouwer: „Este vorba de critica orientării din fundamentele matematicii numită «logicism», care constă în încercarea de a reduce matematica la logică, după ce aceasta din urmă fusese, la rândul ei, redusă la un fel de calcul matematic. Nae Ionescu se baza în critica sa pe argumente de tip kantian, pe unele afirmații ale lui Poincaré și pe concepțiile matematicienilor tradiționaliști”[3]. Pe scurt, Nae Ionescu susține că a demonstrat în lucrarea sa că logistica nu izbutește să reducă matematica la logică, întrucât „(a) matematica presupune în noțiunile sale de bază în mod necesar un conținut care nu poate fi creat prin simpla formă a gândirii, iar în metodele sale de cercetare posibilitatea unui progres, a unei invenții care nu poate fi dedusă cu precizie din raționamentele analitice; (b) valoarea matematicii rezidă în relația ei cu realitatea, în legătura ei cu realitatea – o notă caracteristică pe care nu o posedă logica, nici măcar în credința logisticienilor înșiși. Aceste consecințe indică în același timp cauzele nereușitei totale a logisticii. Ceea ce a vrut ea să evite a fost « intuiția», considerată ca element impur în matematică. În locul acestei «intuiții» prohibite, care îi oferă matematicii conținutul, logistica instituie cerința strictei formalități”[4].

*

Prin preocupările sale în domeniul logicii matematice, Octav Onicescu s-ar înscrie pe linia intuiționistă deschisă de Nae Ionescu[5]. Asemănător teoriilor intuiționiste, teoria logică propusă de Octav Onicescu este una care nu ia în considerare decât sistemele de propoziții adevărate, cum ar fi sistemul aritmeticii, sistemul geometriei euclidiene etc.[6]; avem de-a face deci cu o logică cu o singură

---

[2] Publicată postum de Constantin Floru, Constantin Noica și Mircea Vulcănescu în „Izvoare de filosofie. Culegere de studii și texte”, II, 1943, Editura Bucovina „I.E. Torouțiu”, 1944, p. 1–52, republicată în limba română în vol. *Neliniștea metafizică* (traducere de Alexandru Surdu), Editura Fundației Culturale Române, București, 1993, p. 5–74.

[3] Alexandru Surdu, *Vocații filosofice românești*, Editura Academiei Române, București, 1995, p. 74.

[4] Nae Ionescu, *Logistica – încercare a unei noi fundamentări a matematicii*, în vol. *Neliniștea metafizică*, ed. cit., p. 53–54.

[5] Alexandru Surdu, *Vocații filosofice românești*, p. 79. Vezi, de asemenea, Alexandru Surdu, *Contribuții românești în domeniul logicii în secolul XX*, Editura Fundației „România de mâine”, București, 1999, p. 178.

[6] Octav Onicescu, *Principes de logique et de philosophie mathematique*, Editura Academiei Române, București, 1971, p. 41.

valoare, adevărul, o logică monovalentă, corespunzătoare logicii pozitive sau logicii fără negație din abordările intuiționiste[7]. Fiind un apropiat al lui Nae Ionescu și dezbătând împreună probleme ale logicii și matematicii, este de remarcat și faptul că logica lui Onicescu cu o singură valoare „nu este de inspirație intuiționist occidentală, cum se consideră de obicei, ci este o contribuție originală a savantului român Octav Onicescu, bazată pe unele considerații autohtone cu mult anterioare față de cele occidentale (Griss, 1948), cu toate că lucrarea lui Onicescu apare abia în 1971”[8].

Onicescu pornește în teoria sa de la definițiile conjuncției și disjuncției: conjuncția și disjuncția dintre p și q reprezintă ele însele propoziții ale sistemului S (sistemul propozițiilor adevărate), ca și propozițiile simple p și q, datorită faptului că nu se mai ia în considerare decât cazul când cele două componente sunt adevărate amândouă. Disjuncția și conjuncția va conduce și la definiția implicației; vom avea[9]:

$p \vee q \rightarrow p$ (respectiv $p \vee q \rightarrow q$)

$p \rightarrow p \wedge q$ (respectiv, $q \rightarrow p \wedge q$)

de unde, ca o consecință directă:

$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

Cât privește matematica, Onicescu are o poziție care-l situează indiscutabil în apropierea intuiționismului, discutând despre caracterul intuitiv al construcției matematice: „Constituirea obiectelor matematice nu este arbitrară, deși ea utilizează cea mai mare libertate pe care o posedă spiritul nostru. Nefiind arbitrară, ea procedează urmând afinități structurale, urmând analogii cu alte obiecte – chiar cu un caracter concret – urmând necesitățile interne ale teoriilor în care ele trebuie să fie înglobate, sau pentru a răspunde anumitor exigențe a unei logici interioare a spiritului care încearcă – sub forma «experienței mentale» – construcții destinate să satisfacă anumite condiții exterioare”[10].

*

Grigore Moisil a fost considerat pe bună dreptate fondatorul școlii românești de logică matematică, nu doar prin contribuțiile sale importante, ci și prin faptul că mulți cei dintre care au activat la noi în acest domeniu i-au fost discipoli (precum Eugen Mihăilescu)[11].

În logica românească, Grigore Moisil se remarcă mai ales cu un sistem de logică modală[12]. Logica sa modală generală este un efort de a pune „în același

---

[7] Alexandru Surdu, *Vocații filosofice românești*, Editura Academiei Române, București, 1995, p. 76.

[8] Idem, *Vocații filosofice românești*, p. 78.

[9] Octav Onicescu, *Principes de logique et de philosophie mathematique*, p. 47.

[10] Octav Onicescu, *Principes de logique et de philosophie mathematique*, p. 10.

[11] Viorel Vizureanu, *Contribuțiile de logică matematică ale lui Grigore Moisil*, în vol. Alexandru Surdu, Dragoș Popescu (coordonatori), *Istoria logicii românești*, Editura Tehnică, București, 2006, p. 286.

[12] Grigore Moisil, *Încercări vechi şi noi de logică neclasică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965, p. 217–328.

cadru, pe cât posibil, celelalte sisteme”[13], fiind una dintre cele mai originale sinteze din logica contemporană[14]. Vom reda în continuare pe scurt ceea ce s-ar putea numi o importantă contribuție românească la dezvoltările logice de tip intuiționist.

Moisil foloseşte functorii lukasiewiczieni K (conjuncţia), A (disjuncţia), C (implicaţia), iar pentru a determina modalitatea unei propoziţii utilizează functorii η (imposibilitatea), γ (contingenţa), μ (posibilitatea), ν (necesitatea) şi N (negaţia). În plus, introduce functorul S, care înseamnă „fără” (aproximativ, de pildă, în exprimarea „Cavalerul este fără frică şi fără pată”; functorul S va fi numit şi „excepție”), şi care dă originalitatea sistemului lui Moisil. Vom putea avea astfel:

Sxy = x fără y

În logică bivalentă, S poate fi definit simplu prin K şi N:

Sxy = KxNy

În logica modală, S va avea semnificaţia „p poate fără q” sau „posibil fără”.
În acest sistem, adevărul este:

Cxx, adică x implică x

Falsul:
Sxx, adică x poate fără x
Imposibilitatea:

ηx = CxSxx, adică propoziţia „x implică falsul” (falsul fiind Sxx) înseamnă că x este imposibil sau absurd.

Contingenţa:

γx = SCxxx, adică adevărul (Cxx) poate fără x

Posibilitatea:

μx = ηηx, adică dubla imposibilitate echivalează cu posibilitatea

Necesitatea:

νx = γγx, adică dubla contingenţă echivalează cu necesitatea (o idee stranie intuitiv, „e contingent că x este contingentă = x este necesar”, care însă conduce la rezultate în sistem)

[13] Anton Dumitriu, *Logica polivalentă*, Editura Enciclopedică Română, București, 1971, p. 274.
[14] Gheorghe Enescu, *Logica simbolică*, Editura Științifică, București, 1971, p. 199.

Axiomele de la care pleacă Grigore Moisil sunt următoarele (ele nu conţin negaţia, operând în manieră intuiţionistă):

1. CxCyx
2. CcxCxyCxy
3. CCxyCCyxCxz
4. CKxyz
5. CKxyy
6. CCzxCCzyCzKxy
7. CxAxy
8. CyAxy
9. CcxzCCyzCAxyz

Prima axiomă se traduce intuitiv: dacă x este adevărat, atunci el este implicat de orice propoziţie y (fie ea adevărată sau falsă) ş.a.m.d.

La aceste axiome adaugă încă două legate de functorul S:

10. CyASxx

11. CzAxy / CSzyx

Prima axiomă spune: dacă y este adevărat, atunci disjuncția logică „Syx sau x” este adevărată (propoziția y implică y fără x sau x). A doua: dacă pentru un sistem de propoziții date x, y, z implicația CzAxy este adevărată, atunci este adevărată și implicația CSzyx.

Sistemul logicii modale generale poate fi dezvoltat chiar mai mult pe baza modalităților.

Moisil desparte definiția imposibilității ηx=CxSxx („propoziția x este imposibilă” echivalează cu „x implică falsul” (Sxx)) în două implicații:

12. CηxCxSxx

13. CCxSxxηx

adică „dacă x este imposibil atunci x implică falsul” și „dacă x implică falsul, atunci x este imposibil”.

Contingența (adevărul fără x), γx=SCxxx, se desparte în alte două implicații:

14. CγxSCxxx

15. CSCxxxγx

Urmează alte definiții pentru posibilitate și necesitate:

16. Cμxηηx

17. Cηηxμx

18. Cνxγγx

19. Cγγxνx

Pe baza formulelor 1 – 19, Moisil demonstrează mai multe teze precum „Necesitatea implică posibilitatea”, „Necesitatea implică adevărul” etc.

Prin introducerea axiomei distributive CCKxyz ACxz Cyz, se obține „logica pozitivă (sau intuiționistă, sau modală) specială”.

Sistemul construit pe baza formulelor 1 – 19, luate ca axiome și adăugând alte două axiome (CCKxyz ACxz Cyz și CKSzxSzySzAxy), este denumit de Moisil „logica modală specială”.

Dacă adăugăm axiomele Cxy/CNyNx, CxNNx, CNNxx la axiomele logicii modale generale, obținem „logica modală simetrică generală".

În măsura în care Grigore Moisil este un intuiționist, trebuie ținut seama de faptul că el „nu adoptă linia extremistă a intuiționistului olandez L.E.J. Brouwer, ci pe aceea intuiționist-formalistă a lui Heyting"[15]. Iar în măsura în care el „jonglează" atât cu sisteme clasic-formaliste, cât și cu sisteme intuiționist-formaliste, obținând o ierarhie a sistemelor formale, o trecere de la un sistem la altul, fie pornind de la cele supraordonate, fie de la cele subordonate, nu anulează statutul intuiționist al anumitor sisteme (fiind un „rezultat pozitiv pentru logica intuiționistă"): „admiterea sistemelor formalist-neointuiționiste, care reproduc la un nivel foarte abstract notele logicii intuiționiste, în cadrul ierarhiei formaliste din teoria generală a sistemelor, înseamnă de fapt recunoașterea statutului ferm, formalistic al logicii intuiționiste în contextul logicii moderne"[16].

*

Alexandru Surdu își dezvoltă contribuțiile de logică intuiționistă pornind de la următoarea problemă[17]: există posibilitatea unei descrieri formale a regularităților aparținând modului de gândire intuiționist, există posibilitatea elaborării unei logici a matematicii intuiţioniste, diferită de logica matematică obişnuită? De aici Alexandru Surdu dezvoltă o teorie autentic intuiționistă numită „logica matematicii intuiționiste – teoria intuitivă" [18].

Elaborarea unei logici a matematicii intuiţioniste a fost o preocupare pentru mulţi dintre apropiaţii orientării în discuţie[19], printre care iese în evidenţă A. Heyting, însă toate aceste abordări au venit dinspre perspectiva formalistă. Cu alte cuvinte, s-a formalizat, ţinându-se cont doar de teza intuiţionistă (6), şi „înaintea oricărei consideraţii referitoare la o teorie logică intuitivă a acestei matematici"[20], ceea ce a dus treptat la o înrudire între formalism şi intuiţionism. Heyting însuşi, în ultimele sale lucrări, a devenit un adversar al formalismului alăturat intuiţionismului.

Asemenea probleme ar fi evitate dacă s-ar construi o teorie logică generală care să ţină cont de toate cele şapte teze intuiţioniste. Se poate vorbi astăzi de o „teorie intuitivă", de o logică neaxiomatică a matematicii intuiţioniste, care vizează mai ales tezele (3), (4) şi (5)[21].

---

[15] Alexandru Surdu, în *Vocații filosofice românești*, Editura Academiei Române, București, 1995, p. 79.

[16] Idem, *Elemente de logică intuiționistă*, p. 158.

[17] *Ibidem*, p. 20.

[18] Vom expune în continuare această viziune preluând textul nostru din articolul *Schiță asupra unei logici intuiționiste*, în „Revista de filosofie", nr. 3–4, 2002, p. 317–322.

[19] Alexandru Surdu, *Elemente de logică intuiționistă*, p. 21–46.

[20] Alexandru Surdu, *Formalismul și intuiționismul în dezvoltarea logicii moderne*, în vol.: *Orientări contemporane în filosofia logicii*, coord. Crizantema Joja, Editura Științifică, București, 1991, p. 339.

[21] Elaborată și expusă pe larg de Alexandru Surdu în *Elemente de logică intuiționistă*, p. 45–98.

În acest demers, se porneşte de la o altă idee brouweriană conform căreia dezvoltarea matematicii presupune mai multe „stadii”[22]. *Primul stadiu* se referă la creaţia pură, intuitivă a sistemelor matematice, *al doilea stadiu* presupune o „paralelă lingvistică a matematicii”, fiind vorba despre un limbaj matematic, în *al treilea stadiu,* limbajul devine obiect de studiu, în *al patrulea stadiu* ia fiinţă logistica (un sistem matematic de ordinul doi, de fapt, o logică matematică neformalizată), în *stadiul cinci* se introduce limbajul simbolic, în *stadiul şase* se studiază matematic limbajul simbolic (s-ar putea vorbi de o matematică de ordinul trei), în *stadiul şapte* se introduce un simbolism diferit de matematica de ordinul trei, iar *stadiul opt* este stadiul matematic al limbajului simbolic, indiferent de matematica de ordinul trei, un fel de matematică de ordinul patru. Practic, doar primul stadiu reprezintă matematica intuiţionistă, al doilea e util pentru comunicarea şi memorarea rezultatelor matematice, al treilea, studiul limbajului matematic, în calitate de însoţitor al construcţiilor matematice se referă la formele, operaţiile şi principiile logice aplicabile în matematică. Celelalte stadii nu sunt interesante centru intuiționist, ele au locul lor, însă nu trebuie legate de matematica pură.

Logica matematicii intuiţioniste este relativă la stadiile doi şi trei din dezvoltarea matematicii, ea nu este deci o logică a matematicii în general şi este posterioară matematicii pure. Ea reprezintă studiul raportului dintre entitățile matematice şi expresiile lor lingvistico-simbolice, al relaţiilor dintre expresiile lingvistice în funcţie de relaţiile dintre entităţile matematice şi al principiilor logice pe baza cărora se face trecerea de la relaţiile dintre expresiile lingvistice la alte relaţii asemănătoare.

Paralelismul matematico-lingvistic înseamnă elaborarea unui limbaj în care fiecărei entităţi matematice să-i corespundă un semn lingvistic. Am precizat deja că entităţile matematice mentale nu sunt identice cu exprimarea lor lingvistică *(in scripto* sau *in voce);* cifrele, de pildă, exprimate alfabetic (unu, doi...) sau hieroglific (1, 2...) nu sunt identice cu entităţile pe care le exprimă. În matematica intuiţionistă, adevărul nu mai este corespondenţa dintre o expresie lingvistică şi un fapt matematic, ci este chiar construcţia faptului respectiv, iar funcţia limbajului este de a exprima *cât mai exact* adevărul matematic. Avem de-a face deci cu o primă treaptă (a) conţinând entităţi matematice mentale şi operaţii cu astfel de entităţi şi cu o a doua treaptă (b) formată din expresiile lingvistice. Vom nota cu α_i, β_i, γ_i…, expresiile lingvistice care reprezintă entităţi determinate şi cu α, β, γ..., expresiile lingvistice care reprezintă operaţii determinate cu acele entităţi. Primele vor fi *constante individuale*, cele din urmă *constante propoziţionale*, împreună fiind ceea ce s-ar putea numi *constante intuiţioniste,* iar ambele tipuri exprimă adevăruri cu acelaşi statut existenţial, singura deosebire dintre ele fiind faptul că primele exprimă adevăruri *implicite,* în timp ce ultimele exprimă aceleaşi adevăruri *explicit.* Treapta (c) este treapta *generalizării* constantelor intuiţioniste, depăşirea stadiului doi şi intrarea în stadiul trei unde obiectul investigaţiei este *limbajul matematic.* Aici vom avea *variabile intuiţioniste individuale* (notate cu a_i, b_i, c_i...)

[22] L.E.J. Brouwer, *Over de grondslagen der Wiskunde*, Amsterdam, 1907, p. 173–175, apud Alexandru Surdu, *Elemente de logică intuiţionistă*, p. 45–47.

şi *variabilele intuiționiste propoziționale* (notate cu a, b, c…). Variabila intuiționistă generalizează constantele intuiționiste și se citește „oricare or fi constanta…”. De exemplu, a_i este orice număr natural par, b_i orice număr natural impar; expresia $a_i + \alpha_i = b_i$ este o expresie matematică alcătuită din variabile individuale şi o constantă individuală ($\alpha_i = 1$) şi se traduce prin „orice număr par căruia i se adaugă o unitate devine un număr impar”. Rezumând, paralelismul matematico-lingvistic se realizează pe trei trepte: (a) treapta adevărurilor matematice (construcţii independente de limbaj); (b) cea a constantelor individuale sau propoziţionale exprimând adevărurile matematice; (c) cea a variabilelor intuiţioniste individuale sau propoziţionale, care generalizează constante. Sensul trecerii este: (a) → (b) → (c). Această schemă poate fi numită „calea directă de realizare a paralelismului matematico-lingvistic”.

Pe această cale pot fi gândite atât operaţii matematice exprimabile prin α, β, γ..., cât şi unele de alt tip, „care poarta *asupra* operaţiilor exprimabile prin α, β, γ…”. De pildă, prin construcţia intuitivă exprimată prin „1 + 2” (a) se construieşte şi „2 + 1” (β). Avem o egalitate matematică aici, operaţia intuitivă fiind exprimată prin „1 + 2 = 2 + 1”. Între α şi β se poate introduce semnul „ = ” pentru a obţine α = β. Ultimul rezultat, α =β, se poate exprima în cuvinte astfel: „Dacă α = l + 2 şi β = 2+ l, atunci α = β”. De subliniat că aceste cuvinte pot apărea numai între entităţi exprimate prin cifre şi nu exprimă operaţii matematice. Ne aflăm în stadiul al treilea al matematicii, unde sunt studiate relaţiile dintre expresiile lingvistice ce pot fi numite operaţii logice şi care sunt simbolizabile. De pildă, din „Dacă α = l + 2 şi β = 2 + 1, atunci α = β” se obţine:

$$((\alpha = 1 + 2 \ \& \ (\beta = 2 + l)) \supset (\alpha = \beta).$$

Introducând variabile în locul expresiilor constante, avem:

$$(a \wedge b) \supset c$$

Este foarte important a se preciza că ultima operaţie este obţinută pe cale directă, deci are legitimitate, iar interpretarea sa conduce la legitimarea şi a unei căi inverse (c) → (b) → (a). Pentru variabilele propoziţionale, interpretarea pe cale inversă oferă dificultăţi, însă deocamdată interesează constantele propoziţionale obţinute direct sau pe cale inversă. Cele dintâi exprimă direct adevăruri matematice, *asertează* adevărul matematic, *îl comunică* şi se numesc *expresii asertate* sau *aserţiuni*; cele de-al doilea tip se dovedesc prin verificare că exprimă adevăruri matematice, sunt *atestate, confirmate* ca expresii ale unor adevăruri matematice şi se numesc *expresii atestate.* Corespondenţa cu adevărurile matematice arată că (1) se respectă paralelismul lingvistico-matematic şi (2) nu permit apariţia raţionamentelor în care sunt folosite principii de tipul *tertium non datur.*

Calea intuiționistă directă poate fi redată prin următoarea relație: (A) → (U) →($L_s\alpha$), unde A reprezintă o construcție mentală, U expresia cifrică, iar $L_s\alpha$ asertarea constantei propoziționale. Pe cale inversă, plecând de la o constantă propozițională, se poate ajunge fie la o construcție mentală, constanta fiind atestată, fie nu se ajunge la o construcţie mentală obişnuită în matematica intuiţionistă, ci la un caz în care se realizează o construcţie mentală corespunzătoare altei expresii constante ce o contrazice pe cea vizată (fiind *negată)* sau la un caz în care nu poate fi realizată nicio construcţie mentală (expresia e *nedecidabilă).* În ce priveşte expresia negată, s-a văzut că nu este obţinută prin atestare şi, din punctul de vedere al lui Brouwer, nu-i corespunde niciun adevăr matematic. Negaţia de acest tip este numită *absurditate* şi este obţinută prin metoda reducerii la absurditate (ce nu trebuie confundată cu demonstraţia prin absurd). O denumire ce ar evita confuzia ar fi *reducere la negaţie.* Aici se porneşte de la o expresie (α), se asertează o expresie (β) ce o contrazice pe (α) și se ajunge la ($\neg\alpha$). Se vede că reducerea la negaţie nu mai are la bază *tertium non datur*, ci *legea contradicţiei.* Se poate da un exemplu folosind elemente dinăuntrul acestei teorii: notând cu „A" expresia constantă $((\alpha = 1 + 2) \& (\beta = 1 + 3)) \supset (\alpha = \beta)$ şi cu „B" expresia constantă $((\alpha = 1 + 2) \& (\beta = 1 + 3)) \supset (\alpha \neq \beta)$, asertăm B şi negăm A, admitem B şi respingem A. De remarcat că problema negaţiei a născut dezbateri ample în interiorul intuiţionismului, dar de notat este faptul că, în ciuda activismului constructivist, negaţia este admisibilă în anumite forme (în varianta brouweriană nu-i corespund construcţii efective, ci construcţii care o contrazic, în maniera lui Heyting este o construcţie ipotetică). Se observă că nu se poate vorbi totuşi de o negaţie „tare" ca în logica formală. Legat de constantele propoziţionale nedecidabile, trebuie evidenţiat că ele nu sunt admise în contextul paralelismului matematico-lingvistic, ele neavând corespondenţă cu construcţiile efective şi fiind diferite de construcţiile ce duc la contradicţii.

După aceste consideraţiuni asupra negaţiei, se impune o reevaluare a specificului variabilelor propoziţionale intuiţioniste. Variabilele propoziţionale generalizează expresii asertate sau atestate, dar şi expresii negate: variabilele propoziţionale a, b, c... generalizează numai constante propoziţionale asertate sau atestate, iar variabilele $\neg$a, $\neg$b, $\neg$c... generalizează numai constante propoziţionale negate.

Partea cea mai importantă a unei logici o reprezintă aceea care cuprinde operaţiile logice. Cele intuiţioniste au un specific aparte care constă în faptul că nu sunt definite, ci *explicitate* drept concepte fundamentale. Vom avea patru operaţii:

$a \supset b$, „din a urmează b"

$a \wedge b$, „a și b"

$a \vee b$, „a sau b"

$\neg a$, „non a"

Conjuncţia (prin intermediul constantelor propoziţionale) are loc când ambele constante sunt asertate: când are loc $L_s\ \alpha$ şi are loc $L_s\ \beta$, atunci are loc $L_s\ \beta$, atunci are loc $L_s\ (L_s\ \alpha \wedge L_s\ \beta)$. Trebuie completate aceste chestiuni cu cele ce se obţin prin calea inversă a atestării pentru a nu rămâne într-o logică fără negaţie. Dacă cel puţin un membru al unei conjuncţii este negat (când pornim de la constante către construcţii), atunci conjuncţia nu este atestată. De pildă, $L_t\ (L_t\ \alpha \wedge L_t\ \gamma)$ este o conjuncţie atestată. $L_t\ \alpha$ nu poate alcătui o conjuncţie atestată cu $\neg\beta$, deci $\neg\ (L_t\ \alpha \wedge \neg\beta)$, și nici $\neg\alpha$ și $\neg\beta$ nu pot alcătui o conjuncţie, deci $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$. Aşadar, prin asertare, vom avea conjuncţii asertate, pe calea atestării vom avea conjuncţii atestate şi conjuncţii negate. Prin generalizare, $(a \wedge b)$ reprezintă o conjuncţie asertată sau atestată, iar $\neg(a \wedge \neg b)$, $\neg (\neg a \wedge b)$ şi $\neg(\neg a \wedge \neg b)$ reprezintă conjuncţii negate. Remarcăm o importantă diferenţă faţă de logica formală: (p & q) în logica formală nu este mereu adevărată, în timp ce $(a \wedge b)$ este asertată şi atestată totdeauna, întrucât a şi b înlocuiesc numai constante asertate sau atestate.

În cazul *disjuncţiei*, dar şi al celorlalţi operatori, se procedează în mod analog. Pe cale asertivă, disjuncţia este posibilă când ambii membri sunt asertaţi, deci $L_s (L_s \alpha \vee L_s \beta)$. Pe calea atestării, ambele componente sau numai una pot fi negate; în primul caz, disjuncţia nu se realizează, $\neg (\neg \alpha \vee \neg \beta)$, în al doilea, vom ajunge la rezultatul dorit, atestându-se alternativa: $L_t (\neg \alpha \vee L_t \beta)$ şi $L_t (L_t \alpha \vee \beta)$.

Implicaţia respectă principiul următor: „dacă întotdeauna când are loc $L_s \alpha$, are loc şi $L_s \beta$, atunci are loc şi $L_s (L_s \alpha \supset L_s \beta)$ şi dacă întotdeauna când are loc $L_t \alpha$, are loc şi $L_t \beta$, atunci are loc şi $L_t (L_t \alpha \supset L_t \beta)$”. Dacă α ar fi negat şi β ar fi asertat şi atestat sau β ar fi negat şi α asertat sau atestat, atunci nu avem implicaţie, deoarece, dacă are loc o contradicţie, nu poate avea loc prin aceasta şi o construcţie matematică efectivă. Dacă α şi β ar fi amândouă negate, am avea o relaţie între două expresii fără corespondent matematic.

Se cuvin făcute următoarele remarci: operaţiile logice intuiţioniste nu pot fi introduse prin combinaţii, întrucât sunt introduse comprehensiv; formulele se obţin generalizând rezultatele matematice şi raţionamentele utilizate.

Cele expuse mai sus constituie ceea ce se numeşte de obicei „logica propoziţiilor”, reprezentând partea cea mai semnificativă a unei logici intuiţioniste. Desigur, se poate merge mai departe, către o logică intuiționistă a predicatelor[23]. În ce privește logica matematicii intuiţioniste în varianta teoriei intuitive, ea rezidă în obţinerea unor forme de bază, cu semnificaţie evident intuiţionistă, respectând strict tezele intuiţioniste. Este o construcţie principială ce precede construcţia efectivă a teoriei intuitive ce pare a reveni mai degrabă matematicianului decât logicianului. Însă, pentru ca logica matematicii intuiţioniste să fie completă, ar trebui construit un sistem axiomatic (conform tezei 7) care să descrie teoria intuitivă. În logica intuiţionistă, în general, sistemele axiomatice au precedat teoria intuitivă. Dintre acestea, numai sistemul lui Heyting are legătură cu teoria intuitivă, având câteva importante trăsături intuiționiste, însă, așa cum recunoaște el însuși, și acesta „eşuează” în formalism.

*

În fine, există deci un intuiționism românesc? Se pare că Nae Ionescu a deschis o cale pe care au mers câțiva logicieni români; nu știm dacă putem spune că a existat o școală intuiționistă la noi, dar putem spune că au existat influențe de la un logician la altul în acest câmp; putem spune cu certitudine că în România au existat preocupări serioase legate mai mult sau mai puțin de maniera intuiționistă de a gândi logica sau matematica; mai putem spune, desigur, și că au existat rezultate notabile în această direcție.

[23] Câteva propuneri pentru elaborarea unei astfel de logici sunt prezente și în lucrarea lui Alexandru Surdu, *Elemente de logică intuiționistă*, p. 88–98.