DEMONSTRAȚIA MATEMATICĂ ȘI DEMONSTRAȚIA SPECULATIVĂ. LINII DE ORIENTARE

DRAGOȘ POPESCU

Cunoștințele matematice erau obținute și folosite cu mult timp înainte ca matematicienii să-și facă apariția în vechea Grecie. Este știut de multă vreme: în Egipt și în Mesopotamia se executau frecvent măsurători de teren și construcții de anvergură ce necesitau calcule precise, observații astronomice, se alcătuiau calendare și se efectuau operații complicate cu numere întregi și fracționare cu peste un mileniu înainte de Thales. Kant știa că egiptenii se foloseau deja de teorema atribuită acestuia; chaldeenii au fost renumiți, din Antichitate până în Epoca modernă, pentru rezolvările ingenioase de probleme matematice dificile; mai recent, s-a descoperit că nici populațiilor Lumii Noi nu le erau străine capacitățile de a calcula. Iar navigația între insulele Pacificului, practicată demult de populațiile care locuiau acolo, nu se putea realiza nici ea fără cunoștințe de astronomie și geometrie. Poate că răspândirea cunoștințelor matematice în vechime a fost cu mult mai largă decât se poate reconstitui azi pe baza arheologiei.

Există totuși o mare deosebire între a *rezolva* o anumită problemă de matematică și *a realiza o demonstrație matematică*. Și acest lucru era bine cunoscut pe vremea lui Kant, ba chiar înaintea lui. O problemă de matematică apare în decursul utilizării cunoștințelor și deprinderilor matematice și se rezolvă cu ajutorul resurselor (cunoștințe și deprinderi) deja disponibile. O demonstrație are însă nevoie de elaborarea prealabilă a unor instrumente conceptuale, ceea ce presupune invenție și modificare a ceea ce este deja disponibil; demonstrarea (realizarea unei demonstrații) nu este același lucru cu rezolvarea unei probleme, ci permite/impune încadrarea problemelor în tipuri, soluționarea tipurilor de probleme, precum și apariția unor tipuri noi de probleme, la rândul lor soluționabile prin noi demonstrații. Caracterul universal (valabilitatea pentru un număr nedeterminat de cazuri) al demonstrației matematice reiese cu putere din această trăsătură a ei – de facilita rezolvarea și generarea de probleme matematice.

Încă din primele momente ale apariției filosofiei, forța cu care demonstrația matematică propulsa înainte cunoașterea matematică a fost remarcată. Thales (recunoscut și ca matematician, nu doar ca filosof) și Pitagora (recunoscut mai ales ca matematician, deși poate a fost mai degrabă filosof) sunt dovezi în sprijinul afirmației de mai sus. Încă de la ei, filosofia a încercat să preia din forța și stringența argumentării matematice. După două mii de ani, forța și stringența argumentării matematice au fost adoptate ca normă pentru orice argumentare științifică, filosofia obligată să intre în rândul științelor sau să se autosuspende.

Au existat însă și puncte de vedere potrivit cărora imitarea, de către filosofie, a matematicii, nu este în măsură să-i aducă serviciile scontate. Aceste puncte de vedere filosofice, în măsura în care nu le recunosc procedeelor matematicii importanța cuvenită, nici n-ar merita luate în seamă. Însă, întrucât dau dovadă de o înțelegere corespunzătoare a sferei raționalității matematice, nu pot fi date la o parte din perimetrul filosofiei.

Ceea ce ne propunem în paginile care urmează nu este să analizăm dacă adoptarea argumentării de tip matematic este sau nu este adecvată demersului filosofic. Vom întreprinde numai o prezentare, extrem de sumară de altfel, a *componentelor de bază* (cele mai simple) ale demonstrației matematice la unii matematicieni și filosofi importanți (dintre care unii erau și matematicieni, alții nu), prin apel la texte ale acestora, lăsând pentru altădată o examinare a *procedeelor* demonstrative. În paralel, vom prezenta și felul în care a fost înțeles specificul argumentării matematice și al celei filosofice de către un reprezentant al punctului de vedere după care demonstrația matematică nu este un model pentru filosofie, tot pornind de la texte ale sale.

I. DEMONSTRAȚIA MATEMATICĂ

1. Demonstrația geometrică – Euclid

Euclid nu a fost filosof. *Elementele* au fost însă comentate de filosofi, între care se numără și Proclos, autorul unor *In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*, la care ne vom referi *infra*. Textul *Elementelor* nu aparține, probabil, în întregime lui Euclid. Cartea I, care se ocupă cu probleme ale geometriei plane, i se datorează aproape sigur.

Cartea I a *Elementelor* este alcătuită din patru secțiuni: lista termenilor (definițiilor); lista postulatelor; lista de înțelesuri (noțiuni) acceptate (comune); un număr de patruzeci și opt de propoziții demonstrate.

Lista termenilor (Ὅροι) definește: punctul, linia, extremitățile liniei, dreapta, suprafața, extremitățile suprafeței, planul, unghiul, unghiul drept, perpendiculara, unghiul obtuz, unghiul ascuțit, limita, figura, cercul, centrul cercului, diametrul, semicercul, figurile rectilinii, figurile trilaterale (i.e. triunghiurile echilaterale, isoscele, scalene), triunghiurile scalene (cu un unghi drept, cu un unghi obtuz, cu trei unghiuri ascuțite), figurile patrulatere (pătratul, dreptunghiul, rombul, romboidul, trapezul), liniile paralele.

Postulatele (Αἰτήματα) sunt în număr de cinci: α′. între oricare două puncte se poate trage o linie dreaptă; β′. se poate obține un segment de dreaptă continuu într-o dreaptă; γ′. se poate desena un cerc din orice punct și o rază; δ′. toate unghiurile drepte sunt egale între ele; ε′. (dată fiind importanța deosebită pentru geometrie a acestui postulat, reproducem mai întâi textul original, urmat de versiunea lui în limba latină): Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτα μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ’ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ’ᾶ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθὼν ἐλάσσονες / *Et si in duas rectas recta incidens interius et in eisdem partibus angulos duobus rectis minores* *facit, emissas duas rectas in infinitum concidere alternis, quibus in partibus sunt duobus rectis minores anguli*, adică: și dacă o dreaptă căzând între două drepte face două unghiuri interioare mai mici decât două unghiuri drepte, cele două drepte se pot prelungi nesfârșit în cealaltă parte decât a celor mai mici decât cele drepte.

Tot cinci sunt și Κοιναὶ ἔννοιαι (noțiunile comune); ele precizează raportul de egalitate (egalul, ἴσως, luat în sens de mărime, μέγεθος, nu în sensul etic, prezent și el în câmpul semantic al lui ἴσως). Acestea statuează că: α′. două egale cu același sunt egale între ele; β′. dacă același este adăugat la egale, toate sunt (rămân) egale; γ′. dacă același este extras din egale, rămășițele rămân egale; δ′. cele coincidente unul cu altul sunt egale între ele; ε′. întregul este mai mare decât partea. Rolul îndeplinit de aceste κοιναὶ ἔννοιαι este, desigur, metodologic, în sensul că ele îndrumă obținerea propozițiilor pornind de la termeni și postulate.

Cele patruzeci și opt de propoziții ale Cărții I a *Elementelor* sunt ceea ce azi numim *teoreme*. Denumirea de „propoziție" și cea de „teoremă" nu apar la Euclid. Dar echivalentul „propoziției" poate fi considerat cuvântul λῆμμα. Fiecare propoziție este *demonstrată* pe baza termenilor, postulatelor și noțiunilor comune, precum și pe baza propozițiilor deja demonstrate (teoreme) pornind de la termeni, postulate și noțiuni comune. Cartea I a *Elementelor* lui Euclid alcătuiește astfel o structură. Această structură reconstituie proprietățile figurilor unui plan sub forma unor enunțuri în care se regăsesc termenii.

Caracterul sistematic al *Elementelor* lui Euclid a fost recunoscut încă din Antichitate. Astfel, Proclos scrie în cartea amintită mai sus: „teoremele cele mai fundamentale și mai simple, care sunt foarte strâns legate de primele ipoteze, alcătuiesc aici un sistem perfect, iar demonstrațiile altor propoziții se bazează pe ele ca pe cele mai evidente și pornesc de la ele"[1]. Propozițiile cele mai fundamentale și mai simple sunt *elementele*. Proclos face apel la cuvântul grecesc στοιχεῖον pentru a desemna elementele („Elemente se numesc acele [propoziții] al căror studiu are efect asupra cunoașterii celorlalte și prin care se obține rezolvarea dificultăților existente la acestea"[2]; în originalul grec: „στοιχεῖα μὲν οὖν ἐπονομάζονται, ὧν ἡ θεωρία διικνεῖται πρὸς τὴν τῶν ἄλλων ἐπιστήμην, καὶ ἀφ' ὧν παραγίνεται ἡμῖν τῶν ἐν αὐτοῖς ἀπόρων ἡ διάλυσις" – Procli Diadohi, *In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*, *Prologus* II, ex recognitione Godofredi Friedlein, Lipsiae, in Aedibus B.G. Teubneri, MDCCCLXXIII, p. 72). Sensul cuvântului trebuie precizat cu cea mai mare grijă. Punctul, linia și ceilalți ὅροι, nu sunt elemente; elementele sunt *propozițiile* care precizează sensul termenilor, împreună cu *postulatele* care urmează (Proclos scrie: „elementul [este] un fel de propoziție ajutătoare"[3] – în originalul grec: „ἔοικεν λήμματι τὸ τοιοῦτο στοιχεῖον", în Procli Diadohi *op. cit.*, p. 73). De asemenea, nu sunt elemente nici teoremele (propozițiile demonstrate cu ajutorul propozițiilor care

---

[1] Vezi citatul în: Oskar Becker, *Fundamentele matematicii*, în românește de Alexandru Giuculescu, prefață la ediția în limba română de Corneliu Vilt, Editura Științifică, București, 1968, p. 122.

[2] Versiunea românească a fragmentului din Proclos se regăsește în: O. Becker, *op. cit.*, p. 122; în paranteze drepte am pus cuvântul „propoziții" care se subînțelege în textul original. El corespunde pluralului lui λῆμμα, care înseamnă enunț considerat ca adevărat, premisă, dovadă.

[3] O. Becker, *op. cit.,* p. 123.

precizează sensul termenilor și postulatelor („nu orice lucru se poate numi element al oricărui lucru, ci lucrul cel mai primitiv este element al lucrului care este apreciat ca o consecință”[4]).

Preocuparea geometrilor a fost, desigur, de a dezvolta structura ale cărei baze se regăsesc în *Elementele* lui Euclid, prin demonstrarea de noi teoreme.

2. Aristotel despre demonstrație

Aristotel nu a fost matematician. Contribuția lui, incontestabilă și decisivă, în constituirea logicii face însă ca ideile lui privitoare la matematică și concepția sa privind demonstrația să nu poată fi ocolite. Demonstrațiile efectuate de Aristotel în lucrările lui diferă de cele ale lui Euclid. Este firesc să fie așa, deoarece Aristotel a avut printre preocupările sale probleme de psihologie, etică, politică, filosofia naturii (cosmologie, fizică, biologie etc.), nu însă de matematică propriu-zisă (la ale cărei probleme se referă numai incidental). Printre preocupările lui Aristotel, se regăsesc și cele de poziționare a problemelor care țin de psihologie, etică, politică, filosofia naturii în domenii care au devenit apoi discipline filosofice și științifice. Locul matematicii printre viitoarele discipline este stabilit în *Metafizica.* El se învecinează atât cu teologia (sau: filosofia primă, ceea ce a devenit apoi metafizică) cât și cu fizica (filosofia secundă). Cu ambele are elemente comune.

Principala deosebire între demonstrația euclidiană și cea aristotelică constă în faptul că Aristotel utilizează silogisme în demonstrațiile sale, studiindu-le în prealabil, într-o serie de scrieri care au pus bazele *logicii*. Silogismele, în *logica* lui Aristotel, sunt descompuse și analizate în părțile lor componente. În *științe*, silogismele sunt însă ele însele componente. Ele compun demonstrațiile. La Euclid nu întâlnim o preocupare de a clarifica în prealabil statutul demonstrațiilor. Instrumentele utilizate de Euclid sunt, cum am văzut, lista de termeni, postulatele și cele cinci κοιναὶ ἔννοιαι. O economie de mijloace pe care n-o întâlnim în logica aristotelică. Simplitatea demonstrației euclidiene este totuși aparentă, întrucât el *utilizează*, de fapt, procedee pe care nu le definește, ci le subînțelege (de ex. reducerea la absurd). Procedee asemănătoare cu ale sale au fost utilizate de către creatorii geometriilor neeuclidiene.

Aristotel recunoaște că orice știință pornește de la principii. Principiile sunt indemonstrabile. Principiile sunt fie proprii fiecărei științe, fie comune. Caracterul comun al principiilor este precizat de Aristotel: principiile comune sunt analoage sau asemănătoare în diferite științe. Rezultă că statutul principiului trebuie precizat în prealabil. Geometria are principii proprii, precum cele enunțate de Euclid în lista termenilor. Dar enunțurile ce se regăsesc la Euclid printre κοιναὶ ἔννοιαι figurează la Aristotel în rândul principiilor comune; bunăoară γ'. dacă același este extras din egale, rămășițele rămân egale (*Analitica secundă*, I, 10).

Între principiile care stau la baza silogismelor aristotelice și κοιναὶ ἔννοιαι euclidiene se pot constata similarități. Trebuie însă remarcat de la început că, în *Elemente*, κοιναὶ ἔννοιαι se referă strict la termenii și postulatele care le precedă. Aristotel nu are în vedere, în filosofia lui, numai enunțuri (λήμματα) privitoare la puncte,

[4] *Ibidem*, p. 123.

linii, unghiuri, cercuri etc. De fapt, prin termeni (ὅροι) el înțelege altceva decât Euclid. Echivalentul (ca să ne exprimăm astfel) postulatelor (αἰτήματα) lui Euclid la Aristotel este dificil de identificat; ar putea face obiectul unei cercetări cu caracter istorico-filosofic, care să reflecte situația fiecărei științe la vremea respectivă, căreia nu-i putem da curs în paginile de față. În orice caz, dacă am avea de-a face cu așa ceva, postulatele aristotelice nu s-ar restrânge la domeniul geometriei, ele evocându-ne, raportat la cele euclidiene, raportul dintre întreg și parte al acestuia („Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν").

Cu privire la contactul dintre științele aristotelice și matematica euclidiană poate fi evocată categoria aristotelică a *cantității* (ποσόν). Numai că această categorie a fost exploatată de logica aristotelică într-un mod specific, cu referință la judecățile care compun silogismele aristotelice (premise și concluzii). Utilizarea matematică a cantității include și componente care trimit mai curând către categoria aristotelică a *relației* (πρός τί), ale cărei determinații (dublu, jumătate) sunt curent folosite de matematicieni.

Pentru matematicieni, considerarea categoriilor aristotelice s-a dovedit dificilă; aceasta deoarece unele dintre aceste categorii nu fac parte în chip vizibil din perimetrul investigației matematice (e.g. substanța, calitatea), în vreme ce altele sunt valorificate numai după ajustări care să le conformeze raționamentului matematic, dar care le îndepărtează de sensul lor originar, aristotelic.

Pentru Aristotel, între demonstrație (ἀπόδειξις) și necesitate (ἀνάγκη) există o legătură. Demonstrația face parte dintre cele necesare, fiindcă nu poate fi altfel decât este (*Metafizica*, Δ 5, 1015a, 35), iar ceea ce nu poate fi altfel decât este se numește necesar (*Metafizica*, Δ 5, 1015a, 34).

Dacă ar fi să rezumăm într-o frază deosebirea dintre logica aristotelică și matematica euclidiană, am putea spune că Aristotel tratează despre demonstrație, în timp ce *Elementele* lui Euclid ne înfățișează demonstrații. Pentru multă vreme, *teoria* demonstrației a rămas apoi o disciplină filosofică.

3. Demonstrația algebrică – Descartes și notația simbolică

Descartes a fost atât matematician, cât și filosof. Ca matematician, el a avut contribuții importante, care au condus la deschiderea unor direcții de cercetare nedezvoltate în *Elementele* lui Euclid. Interesul lui Descartes pentru matematică se face vizibil din tinerețe când, interesat de rezolvarea unor probleme redutabile, acumulează tot mai multă experiență ca matematician.

Regulae ad directionem ingenii reprezintă contribuția principală a lui Descartes în precizarea noțiunii de demonstrație. De la începutul cercetării sale, Descartes formulează o observație interesantă: „Trebuie să ne pătrundem de gândul că toate științele sunt în așa fel legate unele de altele, încât ne vine cu mult mai lesne să le învățăm pe toate împreună decât să luăm deosebit pe una de alta"[5]. Ideea acestei legături dintre științe se precizează în continuare: „între științele cunoscute doar aritmetica și geometria nu sunt pătate de nici un fel de falsitate și nesiguranță"[6], ceea ce se datorează

[5] René Descartes, *Regulae ad directionem ingenii* [*Reguli de îndrumare a minții*], în românește după textul original cu o introducere și note de Constantin Noica), în: René Descartes, *Două tratate filosofice, Reguli de îndrumare a minții, Meditații despre filosofia primă,* traduse de Constantin Noica; *Viața și filosofia lui René Descartes* de Constantin Noica, Editura Humanitas, București, 1992, p. 139.
[6] *Ibidem*, p. 141.

faptului că „singur ele operează cu un conținut atât de simplu și de pur, încât nu se întemeiază pe nici un lucru pe care experiența să-l fi arătat ca nesigur, constau în întregime din deducții logic înlănțuite”[7]. Ca urmare, modelul aritmeticii și geometriei ar trebui urmat de orice știință, urmând a se identifica acele conținuturi simple și pure care conferă siguranță.

Descartes ne arată cât poate de limpede cum pot fi identificate conținuturile în discuție. *Regula XIII* prescrie ca orice problemă să fie adusă la forma cea mai simplă, apoi divizată în părți cât mai mici[8]. Aducerea problemei la forma cea mai simplă constă în

(a) identificarea și

(b) numirea a ceea ce e necunoscut, apoi

(c) desemnarea a ceea ce e necunoscut prin ceva cunoscut.

Ceea ce apare în plus în problemă („concept zadarnic” după Descartes) va fi îndepărtat, nefiind de folos discuției. De fapt, Descartes prezintă maniera de punere a chestiunii într-o ecuație. Necunoscutul, în această interpretare, este echivalent cu necunoscuta unei ecuații, care urmează a fi rezolvată. Rezultatul obținut nu reprezintă o nouă *entitate*, ci o extensie a cunoașterii asupra lucrului necunoscut, „așa încât ne dăm seama că ceea ce căutăm se împărtășește, într-un fel sau altul, de la firea celor ce au fost date în propoziție”[9]. Identificarea și numirea a ceea ce e necunoscut se realizează convențional, prin notație simbolică.

Pentru Descartes, așadar, punerea în raport a necunoscutului cu ceea ce este deja cunoscut este operațiunea esențială: „cea mai însemnată parte din sârguința oamenilor nu slujește la nimic altceva decât la reducerea proporțiilor acestora, astfel încât egalitatea dintre ceea ce se caută și ceea ce se știe să apară lămurită”[10]. Pentru efectuarea reducerii proporțiilor se recurge la comparație cu entități deja cunoscute: întinderea, forma, mișcarea, iar comparația arată că necunoscutul este asemănător, identic, egal cu ceea ce este cunoscut.

Descartes are reproșuri de făcut metodei silogistice, realizată de Aristotel. Principalul reproș este acela că ea nu reușește să ofere o siguranță comparabilă cu cea geometrică și aritmetică: „Dacă însă deducem un lucru din propoziții multe și felurite, mintea noastră nu este întotdeauna în stare să cuprindă totul într-o singură intuiție”[11]. Reproșul se precizează cu ajutorul unui exemplu: un lanț alcătuit din multe inele nu poate fi prins dintr-o privire; dar, dacă vedem încheieturile dintre două verigi ale lui, putem să spunem că am văzut cum se leagă prima verigă de ultima. Exemplul lămurește mai bine reproșul cartezian față de lanțurile silogistice aristotelice: sistemul științei, așa cum îl construiește Aristotel, are o alcătuire compozită, în loc de a avea una simplă și pură, precum au geometria și aritmetica. Silogismele aristotelice, cu extremii și mediii lor, depind de multe alte lucruri în afară de figuri, linii, numere (ca la Euclid) sau întindere, formă, mișcare (ca la Descartes însuși).

---

[7] *Ibidem*, p. 142.
[8] *Ibidem*, p. 195-202.
[9] *Ibidem*, p. 202.
[10] *Ibidem*, p. 203.
[11] *Ibidem*, p. 162.

Totuși, conținuturile simple și pure asupra cărora se operează în noua știință preconizată de Descartes au un statut ambiguu. Pe de o parte, subiectul care gândește nu este corporal; pe de alta, „numim «corporale» anumite acte care nu pot fi concepute fără întindere, iar substanța în care sălășluiesc ele o numim corp”[12].

4. Teorii logico-matematice ale demonstrației

Teoriile logico-matematice ale demonstrației sunt guvernate de apariția unor domenii noi de cercetare în matematică: geometriile neeuclidiene și teoria mulțimilor.

Geometriile neeuclidiene se sprijină pe *Elementele* lui Euclid. Mai exact, pe interpretarea diferită dată celui de-al cincilea postulat al lui Euclid (vezi *supra*). Ele au produs efecte incalculabile asupra modului în care este înțeleasă geometria ca știință. Cel de-al cincilea postulat al lui Euclid nu a fost propriu-zis respins de János Bolyai, creatorul primei geometrii neeuclidiene, ci redefinit: două drepte sunt paralele dacă nu se întâlnesc într-un plan[13]. De exemplu, în figura de mai jos, dreptele *bm* și *al* sunt *paralele* dacă *al* nu întâlnește în același plan *bm*.

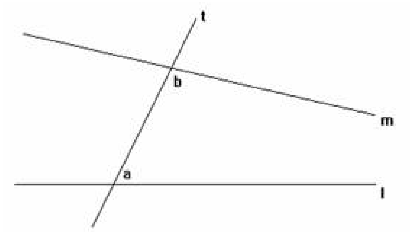

Fig. 1

Se poate remarca faptul că Bolyai respectă *literal* postulatul euclidian. Cele două drepte se pot prelungi la nesfârșit în cealaltă parte decât a unghiurilor mai mici decât suma a două unghiuri drepte, fără a se intersecta. În partea cu suma celor două unghiuri interioare mai mici decât suma celor drepte, toate dreptele din interiorul unghiului *abm* intersectează dreapta *al*. Numai dreapta *bm* nu intersectează dreapta *al*. Bolyai definește un caz-limită al postulatului lui Euclid. Pe baza acestui caz-limită, el construiește o geometrie necontradictorie (introducând suprafața *F*) în care proprietățile figurilor unui plan diferă de proprietățile planului euclidian. Suprafața *F*, în care noua geometrie este valabilă, permite demonstrarea unor teoreme care contrazic propozițiile euclidiene[14]. Bolyai nu modifică Κοιναὶ ἔννοιαι euclidiene. Punctul, linia etc. au același înțeles la el ca la Euclid. Suprafața are însă proprietăți diferite față de cea euclidiană.

[12] René Descartes, *Meditationes de prima philosophia [Meditații despre filosofia primă]*, în românește după textul original cu un rezumat, punct cu punct, al întâmpinărilor și răspunsurilor, precum și un indice de Constantin Noica), în: René Descartes, *Două tratate filosofice, Reguli de îndrumare a minții, Meditații de filosofia primă,* traduse de Constantin Noica; *Viața și filosofia lui René Descartes* de Constantin Noica, Editura Humanitas, București, 1992, p. 326.

[13] János Bolyai, *Appendix: Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica,* Maros Vásárhelyni, Typis Collegii Reformatorum per Josephum et Simeonem Kali de felső Vist., 1832-1833, p. 3.

[14] Jeremy J. Gray, *János Bolyai, Non-Euclidean Geometry and the Nature of Space*, Cambridge, Massachusetts, Burndy Library, 2006, p. 56 sq.

Teoria mulțimilor s-a dezvoltat pornind de la algebră. Calculul algebric a condus la paradoxuri, în anumite situații privitoare la această teorie. Algebra are la bază aritmetica, adică operațiile cu numere (adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea). Acestea, la rândul lor, sunt reglementate de legi de compoziție, analoge „noțiunilor comune" euclidiene.

În teoria mulțimilor, în plus față de aritmetica și algebra clasice, avem de-a face cu noțiunea de „mulțime". Introducerea acestei noțiuni i se datorează lui Cantor, pentru care „mulțimea" este echivalentă cu reuniunea unor elemente distincte într-o totalitate[15]. Față de *Elementele* lui Euclid avem ceva în plus: ideea de totalitate aplicată elementelor. Între κοιναὶ ἔννοιαι euclidiene o întâlneam pe cea care afirma că „întregul este mai mare decât partea". Totalitatea nu respectă însă această cerință, întrucât utilizarea ei conduce la antinomii[16].

Noile descoperiri din geometrie și algebră au avut răsunet în logică. Logica, la vremea acestor descoperiri, era atașată încă de originile ei aristotelice. A renunțat rapid la ele, în vederea realizării proiectului de reducere a matematicii la logică, ori dimpotrivă. Ceea ce a impus revizitarea vechilor noțiuni: definiție, axiomă, element. Cel de-al cincilea postulat al lui Euclid, în lumina noilor interpretări care au debutat cu Bolyai, a fost reconsiderat ca definiție (ceea ce echivalează cu transferul lui din rândul postulatelor, în cel al termenilor – vezi *supra*); un matematician recunoaște aceasta: „Anumite axiome nedemonstrabile din matematici nu ar fi astfel decât definiții deghizate. Acest punct de vedere este adesea legitim și l-am admis eu însumi în ceea ce privește, de exemplu, postulatul lui Euclid"[17]. Definițiile sunt necesare într-un sens care merită subliniat: „Atunci când dăm o definiție, o facem pentru a ne folosi de ea"[18]. Utilizarea definiției se deosebește totuși de utilizarea unuia și aceluiași obiect definit. Dat fiind că același obiect poate fi definit în mai multe feluri. Aceste considerațiuni, aparținând unui matematician reputat, dincolo de importanța lor metodologică, mai semnalează ceva: faptul că teoria demonstrației (rezervată încă de pe vremea lui Aristotel filosofiei) începe să-i preocupe pe matematicieni.

La capătul spectaculoasei evoluții a abordării matematice a demonstrației, care a trecut în prealabil prin faza axiomatizării, „adevărul axiomelor matematice nu mai intră însă în joc"[19].

[15] Anton Dumitriu, *Mecanismul logic al matematicilor*, Editura Academiei RSR, București, 1968, p. 22.
[16] Prezentăm aici una dintre ele, descoperită chiar de Cantor (A. Dumitru, *op. cit.,* p. 23): „Să considerăm toate mulțimile: ele sunt constituite din elemente componente, reunite pe baza unei proprietăți comune. Unele din aceste mulțimi se vor conține singure, altele nu se vor conține, adică nu vor fi element al lor. De pildă, mulțimea tuturor noțiunilor abstracte este ea însăși o noțiune abstractă, deci se conține ca element. Dimpotrivă, mulțimea mamiferelor nu se conține. Să considerăm acum mulțimea tuturor mulțimilor care nu se conțin ca element, mulțime bine definită. Și despre aceasta ne putem pune întrebarea: se conține sau nu se conține? Însă mulțimea aceasta cu necesitate se conține sau nu se conține, a treia posibilitate nu există, *tertium non datur.* Dacă se conține, cum ea conține numai mulțimi care nu se conțin, urmează că nu se conține. Să presupunem că nu se conține: cum ea cuprinde toate mulțimile care nu se conțin, urmează că se conține. Antinomia este evidentă. Nu putem afirma despre mulțimea noastră nici că se conține, nici că nu se conține, deși ea trebuie cu necesitate sau să se conțină, sau să nu se conțină".
[17] Henri Poincaré, *Știință și metodă*, traducere din limba franceză de Vasile Tonoiu, Editura Științifică, București, 1998, p. 103.
[18] *Ibidem*, p. 104.
[19] Anton Dumitriu, *op. cit.*, p. 28.

II. DEMONSTRAȚIA SPECULATIVĂ

Creatorul ultimului sistem filosofic de răsunet universal, Hegel, nu a considerat demonstrația matematică drept potrivită argumentării filosofice. Motivele pentru care a ales această opțiune sunt explicate de el, în *Fenomenologia spiritului* și în *Știința logicii*. Ne vom opri asupra unor pasaje privitoare la acest aspect.

Mai întâi *Fenomenologia spiritului.* Așa cum arată și titlul cărții, aici avem de-a face cu *spiritul*. Oricum ar fi înțeles acesta, el este distinct de *substanța întinsă* (*res extensa*) carteziană. Punctul, linia, suprafața *nu* țin de spirit. Numărul, de asemenea, *nu* ține de spirit. Nu e de mirare că Hegel nu consideră matematica adecvată pentru demersul filosofic. El își explică, în *Prefața* cărții la care ne referim aici, opțiunea sa. Ea se datorează, în principal, faptului că: „die Bewegung des mathematischen Beweises gehört nicht dem an, was Gegenstand ist, sondern ist ein der Sache *äusserliches* Tun”[20]. Acțiunea exterioară este cea care definește puncte, linii, plane, și operează apoi cu ele în cursul demonstrațiilor. Necesitatea teoremelor nu justifică însă necesitatea acțiunii exterioare prin care teoremele sunt demonstrate.

Metodele geometrice și algebrice au în comun ceea ce Hegel numește principiul mărimii. „Principiul *mărimii*, al diferenței lipsite de concept, și principiul *egalității*, al unității abstracte, lipsite de viață, nu se pot ocupa cu acea neliniște a vieții și cu diferențierea absolută”[21]. „Mărimea”, aici, este μέγεϑος euclidiană, iar „egalitatea” corespunde cu egalul, ἴσως. Înțelegerea *mărimii* ca *diferență lipsită de concept* nu este, în sine, o eroare de raționare; este numai o înțelegere improprie raționării filosofice. De asemenea, *egalitatea*, considerată ca *unitate abstractă*, nu este o înțelegere eronată a egalității, este numai o formă de egalitate la care filosofia nu se poate restrânge.

Reproșurile hegeliene privitoare la modul deficitar (din perspectivă filosofică, desigur, nu din perspectivă matematică) de considerare a noțiunilor de mărime și egalitate pot fi acceptate cu condiția să ne fie prezentate și versiunile adecvate, autentic filosofice, ale mărimii și egalității.

Cu privire la *diferența lipsită de concept*, avem o imagine suficient de clară furnizată de Euclid. Cele cinci „noțiuni comune” privesc tocmai această diferență. De asemenea, „noțiunile comune” privesc și unitatea abstractă. Diferența este, în acest caz, lipsită de concept deoarece, *în cazul utilizării filosofice a acestor noțiuni*, raportarea lor la linii, unghiuri, planuri etc. (adică la termeni) dispare, noțiunile comune devenind valabile universal. Iar *unitatea abstractă* (consecință a reducerii mărimii la diferența lipsită de concept), tot în cazul utilizării filosofice a „noțiunilor comune”, nu este altceva decât considerarea oricărei noțiuni ca și cum ar face parte dintre termenii euclidieni.

Rezultă că diferența *în sens filosofic* și unitatea corespunzătoare acestei diferențe (de asemenea în *sens filosofic*) nu sunt lipsite de concept. Cum conceptul nu poate fi definit de la începutul expunerii filosofice (spre deosebire de procedeele matematice),

---

[20] *Phänomenologie des Geistes*, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1999. *Prefața* lucrării hegeliene, din care sunt desprinse aceste cuvinte, privește întreg sistemul, nu numai *Fenomenologia spiritului.*

[21] G.W.F. Hegel, *Fenomenologia spiritului*, traducere de Virgil Bogdan, Editura IRI, București, 1995, p. 33. În original: „Das Prinzip der *Grösse*, des begrifflose Unterschiedes, und das Prinzip der *Gleichheit*, der abstrakten unlebendigen Einheit, vermag es nicht, sich mit jener reinen Unruhe des Lebens und absoluten Unterscheidung zu befassen” (*Phänomenologie des Geistes*, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1999, p. 34).

modificarea conceptului însuși este ceea ce urmărește metoda filosofică. Conceptul este în mișcare. Iată cum este descrisă mișcarea lui în *Fenomenologia spiritului*: „Mișcarea a aceea ce este constă, pe de o parte, în a-și deveni sieși un altul și în a-și dezvolta astfel conținutul său imanent; pe de altă parte, el își ia înapoi în sine această desfășurare, adică această existență-în-fapt a sa, se constituie el însuși ca moment și se simplifică ca determinație. În prima mișcare *negativitatea* este distingerea și punerea *existenței-în-fapt*; în această reîntoarcere în sine, negativitatea este devenirea *simplității determinate*"[22].

De la prima vedere, se remarcă faptul că descrierea mișcării este cu mult mai complicată decât procedura euclidiană. „A-și deveni sieși un altul" și „își ia înapoi această desfășurare" sunt cele două componente ale mișcării. Devenind un altul, conceptul își dezvoltă conținutul; luând înapoi ceea ce a dezvoltat își simplifică dezvoltarea.

Conținutul care devine altul, apoi se simplifică este conceptul. Ceea ce înseamnă că niciodată conceptul nu este nici doar conținutul, nici doar simplificarea acestuia, este întotdeauna ambele. Nu se poate abrevia, pentru a fi folosit independent de contextul dezvoltării sale. Una dintre consecințele care se întrevăd la examinarea sumară a acestei viziuni este că ea nu dă ocazia unei antinomii de tipul celei descoperite de Cantor.

La capătul dezvoltării fenomenologice întâlnim cunoașterea absolută. Ea nu ne apare însă ca o *lege a fenomenului*, i.e. o formulă (ecuație, inegalitate, funcție), care descrie o realitate diferită de ea (cum sunt teoremele, care descriu proprietăți ale unor realități diferite de teoremele însele) ci ca o țesătură, o *configurație de raporturi interne ale conceptului*.

Știința logicii este lucrarea complementară *Fenomenologiei spiritului*, în care dezvoltarea din aceasta este descrisă în termeni categoriali. Logica, în sensul hegelian al termenului, nu face parte din logicile moderne, constituite pornind de la noile dezvoltări ale geometriilor neeuclidiene și ale teoriei mulțimilor (de altfel, geometriile neeuclidiene și teoria mulțimilor nici nu-și făcuseră apariția la vremea elaborării sistemului hegelian). Operațiile matematice nu sunt un criteriu pentru această logică. Categoriile logicii speculative nu pot fi puse în analogie cu figurile geometrice (euclidiene sau neeuclidiene) ori cu numerele. Ele nu se referă la evenimente nedeterminate (circumscrise spațio-temporal), ci la evenimente descrise de *Fenomenologia spiritului.* Mai exact, categoriile logicii speculative sunt structurile, în forma lor completă denumite de Hegel *silogisme*, prin care conceptul este atât conținut dezvoltat, cât și simplitate determinată. Silogismele hegeliene nu sunt, așadar, același lucru cu silogismele aristotelice.

În locul noțiunii matematice de *demonstrație*, Hegel propune *arătarea* (*Monstration*). Este o operațiune diferită de operațiile matematice și constă în explicitarea structurii categoriale, desfășurarea ei în componentele sale. Descrierea aceasta nu este o

---

[22] G.W.F. Hegel, *Fenomenologia spiritului*, traducere de Virgil Bogdan, Editura IRI, București, 1995, p. 37-38. În original: „Die Bewegung des Seienden ist, sich einesteils ein Anders und so zu seinem immanentem Inhalte zu werden; andernteils nimmt es diese Entfaltung oder dies Dasein in sich zurück, d.h., macht sich selbst zu einem *Momente* und vereinfacht sich zur Bestimmtheit. In jener Bewegung ist die *Negativität* des Unterscheidens und das Setzen des *Daseins*: in diesem Zurückgehen in sich ist sie das Werden der *bestimmten Einfachheit*" (*Phänomenologie des Geistes*, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1999, p. 38).

teoremă în sens matematic, o lege a fenomenului. Ca enunţ, ea exprimă starea structurii categoriale într-un moment dat al dezvoltării acesteia.

III. ÎN LOC DE CONCLUZIE

Am evitat pe cât a fost posibil, în cele de mai sus, să intrăm în detalii, atât în ceea ce priveşte componentele demonstraţiei matematice, cât şi în ce le priveşte pe cele ale demonstraţiei speculative. Aceasta pentru că scopul nostru nu este aici de a decide în favoarea uneia dintre cele două tipuri de demonstraţie, ci de a evidenţia individualitatea fiecăreia.

Filosofia vizează, ca şi matematica, certitudinea. Ea înţelege însă, prin certitudine, altceva decât matematica. De fiecare dată când filosofii pun problema certitudinii (ceea ce s-a întâmplat şi la Aristotel sau Descartes, nu numai la Hegel), ei au modificat abordarea matematică a problemei. La Aristotel, existenţa unui demers logic, distinct de cel matematic, precum şi problema principiilor speciale ale fiecărei ştiinţe era în măsură să indice diferenţa dintre raţionamentul matematic şi cel filosofic. La Descartes, apariţia subiectului joacă un rol asemănător.

Certitudinea, în sens filosofic, se aplică la altceva decât în cazul raţionamentului matematic. Hegel a numit acest altceva *spirit.* Din punct de vedere matematic, *spiritul* este inabordabil. Ceea ce este perfect explicabil, de altfel, întrucât *diferenţa*, în matematică, este lipsită de concept, iar *egalitatea* este abstractă.