FILOSOFIA MATEMATICII ȘI EȘECUL LOGICIST ÎN *TRACTATUS LOGICO-PHILOSOPHICUS*

IULIAN GRIGORIU

INTRODUCERE

În *Tractatus Logico-Philosophicus*[1] (TLP în continuare) Wittgenstein nu face doar o critică de multe ori pertinentă a concepțiilor fundaționale de filosofie a matematicii ale lui Frege și Russell/Whitehead, ci elaborează un formalism propriu în vederea fundamentării logiciste a aritmeticii și a evitării contradicțiilor inerente de tip *Principia Mathematica* (PM). În acest scop, filosoful austriac expune o formă generală a operațiunii logice și a modului ei de acțiune asupra funcțiilor propoziționale prin care caută să obțină înaintarea într-un șir de forme logice, proces pe baza căruia va defini numărul natural. În acest studiu arăt că simbolul *N* (numit aici *negație a totalității* sau *negație mutiplicativă*) folosit de Wittgenstein în TLP nu produce transformarea scontată și înaintarea formală nu poate conduce la rezultatul dorit.

În acest scop demonstrez ineficacitatea formală a operatorului *N* (prin mijlocirea operatorului lui Sheffer[2]) de a produce noi propoziții plecând de la baza unui Spațiu Logic (SL) binar. Acest operator particular nu poate să exprime o formă generală și nu joacă un rol special în definirea numărului natural. În legătură cu afirmaţia (6[3]) din TLP („Forma generală a funcţiei de adevăr este $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$"), prezint felul în care a fost înţeleasă de Russell, critica lui Anscombe (care caută să salveze operatorul *N*), dar și interpretarea mai recentă a lui Frascolla; coroborând cu propriile rezultate ajung la concluzia că acțiunea operatorului *N* al lui Wittgenstein

[1] Consult edițiile: în limba română, *Tractatus logico-philosophicus*, traducere, cuvânt introductiv și note de Alexandru Surdu, Ed. Humanitas 1991 (TLP 1991); în engleză, *Tractatus logico-philosophicus*, trad. C.K. Ogden, 1922 (TLP 1922), ediţie republicată Routledge: Londra, 1981, publicat iniţial ca *Logisch-Philosophische Abhandlung*), cu varianta în limba germană apărută iniţial în *„Annalen der Naturphilosophische"* Vol. XIV, 3/4, 1921 (TLP 1921) și *Tractatus Logico-Philosophicus*, trad. D.F.Pears și B.F. Mc. Guiness, cu o introducere de Bertrand Russell, London Routledge and Kegan Paul, 1961, reed. 1974, 2001 (TLP 1961); în franceză *Tractatus logico-philosophicus*, urmat de *Investigations philosophiques*, trad. din limba germană de Pierre Klossowski, introducere de Betrand Russell, collection Tel, Gallimard, 1961 (TLP 1961 fr.); în germană, *Tractatus Logico-Philosophicus*, urmat de *Tagebücher 1914–1916* și *Philosophische Untersuchungen*, în „Schriften 1", Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1969.

[2] În structura ei internă, operaţiunea *N* care face trecerea de la o propoziţie la alta, e o extindere operatorului Nicod/ Sheffer, notat aici cu ∫.

[3] Propozițiile TLP la care se face referire vor fi scrise între paranteze sau redate în text după indicativul lor numeric.

nu este una propice logicismului. Dacă la modul „epidermic" formalismul wittgensteinian sugerează un traseu posibil al înaintării într-un şir de forme, voi arăta că acest lucru nu se poate face ca „import" al generalităţii operaţiunii logice. Singurul mod în care s-ar putea dezvolta sistemul de operațiuni și propoziții este realizabil prin compunerea lor pe baza structurilor interne, modalitate permisă dar nu și practicată de Wittgenstein. Această din urmă dezvoltare/generalizare nu face obiectul studiului de față. Interesul lui Wittgenstein pentru forma generală (a propoziției, a numărului natural, a propoziției matematice) debutează în TLP și devine o preocupare constantă a filosofiei sale. Filosoful va considera drept nebuloasă metoda de a introduce conceptul de număr pe baza formei generale a operațiunii[4], dar va susține în continuare *generalitatea* la nivel de *concept* în același stil tractarian, dar de la alte altitudini.

UN „*TRACTATUS LOGICO-MATHEMATICUS*"?

Relația dintre matematică și logică în *Tractatus* conține acea obscuritate tipică autorului oscilând între o viziune absolutistă și una critică, nehotărât între tendința de a-și urma ideea până la capăt și cea de a stabili doar repere și schițe ideatice din care ar urma să se prefigureze un întreg. Astfel că mai puțin importante apar acordurile sau dezacordurile lui Wittgenstein cu Frege și Russell, cât elucidarea propriei opinii, cu argumente intime, expuse ca prefigurare a înțelegerii, fără a mai da socoteală de domeniile ca atare, de conținuturile lor ce necesită o reașezare pe alte criterii de evidență, o re-scriere ca aducere la suprafaţă a ceea ce numai accidental stă ascuns. La Wittgenstein descumpăneşte că pe de o parte logica e necesară, dar și arbitrară, e scheletul lumii dar și imaginea ei, e criteriul simplității dar și tabloul unui limbaj fără înțeles, frizând absurdul. Faptul că legile și propoziţiile logicii funcţionează de la un punct încolo independent de realitate (practic, după ce a fost rafinat faptul din realitate în propoziţii logice) are darul de a demobiliza încrederea în logică, autorul afirmând că propozițiile sale „nu spun nimic". Afirmaţiile 6.121, 6.122, 6.1221, 6.1222, 6.1223, 6.1224, 6.123 (cu subpropoziţiile sale), 6.124, 6.125, 6.126 şi până la 6.13, discută despre o sintaxă independentă a logicii, cu o simbolistică, reguli şi legi egalitare care merg din tautologie în tautologie şi practic nu spun nimic despre lume şi sensul (propoziţiilor) ei. Aceeași „demitizare" sau „dezvrăjire" suferă și matematica. Nici propoziţiile matematicii nu trebuie confruntate cu realitatea şi, ceea ce logica reflectă prin tautologii, matematica arată prin ecuaţii (6.22). Dar propoziţiile (ecuaţiile) matematicii sunt adevărate sau false într-un sens diferit decât acela în care spunem despre propoziţiile logicii că ar fi adevărate sau false. Propoziţiile matematicii sunt pseudo-propoziţii (6.2), afirmaţii care păstrează pentru ele sensul și alungă

[4] A se vedea *Philosophical Remarks*, editor Rush Rhees, traducere în limba engleză de Raymond Hargreaves și Roger White, Basil Blackwell, Oxford 1998, prima ediție în limba germană, 1964; și *Philosophical Grammar*, partea întâi: *The Proposition and its Sense*; partea a doua: *On Logic and Mathematics*, editor Rush Rhees, traducere în limba engleză de Anthonny Kenny, Basil Blackwell, 1993, prima ediție în limba germană, 1974.

semnificația în alte zone: ele tranzitează limbajul natural care se debarasează de ele după ce le-a folosit (6.211). „Logica lumii" vizibilă în matematică (6.22) e că ea leagă, substituie, pune semnul de egalitate între expresii (cum ar zice Frege, după aluzia de la 6.232) cu aceeaşi semnificaţie (dar de sens diferit); în acelaşi limbaj fregeean, dat ca exemplu de Wittgenstein, transformările matematice (în rezolvarea unor ecuaţii) sunt ale sensului, nu ale semnificaţiei.[5] Ecuaţiile nu au nevoie să fie confruntate cu faptele (reflectate de logică), „corectitudinea lor e vizibilă", afirmă Wittgenstein (6.2321)[6].

Stă în practica matematicilor ca o expresie matematică să fie prelucrată după metode proprii: că e vorba de un fenomen sau un model din realitate (mişcarea unui corp pe o anumită curbă, suprafaţă), că e vorba de un calcul pentru a obţine o lungime, o arie, un volum, că rezolv o ecuaţie algebrică sau diferenţială, că doresc să îmi reprezint matematic un proces complex, un semnal fizic, biologic, că intenţionez să propun sau să demonstrez o teoremă, se presupune că anumite calcule şi raţionamente trec prin diferite forme echivalente substituibile (6.24) şi conduc la nişte soluţii, la un model final[7]. Wittgenstein se exprimă în stilul său paradoxal: „Identitatea semnificaţiei a două expresii (matematice, n.n.) nu se poate *afirma*" (6.2322). Justificarea e simplă: semnificaţia sau forma logică (6.23, 6.231) rămâne constantă, se schimbă doar „învelişul", sensul expresiilor, aşadar nu pot afirma o identitate a semnificaţiei decât dacă aş cunoaşte-o, şi dacă o cunosc, ştiu şi dacă e vorba de aceeaşi semnificaţie (*idem*). În matematică, ecuaţia $Q = 0$ parcurge un drum de echivalenţe ($Q' = 0$, $Q'' = 0$,....) unde Q, Q', Q'',..., au aceeaşi semnificaţie, mai exact sunt sensurile diferite ale uneia şi aceleiaşi semnificaţii; sensurile se obţin unul din altul prin procedee de calcul matematic, iar ultimul Q din şir are darul de a fi rezolvabil. Această situaţie a lui Qn de a fi rezolvabil ţine de sistemul reprezentaţional ales.

Există situaţii în matematică în care nu se merge de la o formă a sensului la alta, ci se elaborează cadrul reprezentaţional cel mai adecvat în care soluţia se impune[8]. Cum se impune soluţia, care e gândul „ascuns" al matematicianului, de unde provine el? Răspunsul la această întrebare, este dat de Wittgenstein la nivelul TLP în felul următor: „La întrebarea, dacă este necesară intuiţia pentru rezolvarea problemelor matematice, trebuie să se răspundă că tocmai limbajul oferă aici intuiţia necesară (6.233). Procesul calculului mijloceşte chiar această intuiţie. Calculul nu este un experiment. (6.2331). Matematica este o metodă a logicii" (6.234).

Limbajul e un mijlocitor, un suport, dar nu separat, rupt de intuiţie. În funcţie de felul în care se răspunde la această problemă a intuiţiei matematice, pusă şi

---

[5] Am numit *reprezentaţionist* stilul după care e de ajuns să fie surprinsă semnificaţia unei propoziţii matematice conform celui mai potrivit sens; sensul poate fi formal, grafic, pictural, cu condiția să expună direct, intuitiv, simplu, natural, conţinutul propoziţiei matematice. Substratul unei astfel de posibilități e unul logic; logica arată, nu demonstrează și nu vorbește.

[6] După cum propoziția logică este o imagine a realității, ea își arată sensul (4.021, 4.022 etc.).

[7] Wittgenstein e împotriva semnului de identitate, căci obiectele sunt identice prin semnele lor: acest aspect merită un studiu separat legat de propoziția 5.53 cu toate subpunctele sale, până la 5.5352.

[8] Lucru vizibil mai ales în geometria elementară, dar nu numai – vezi calculul unor serii infinite, necesitățile de scriere ale unor forme algebrice complexe, generalizări în geometria diferențială prin conceptul de *varietate diferențiabilă*, generalizarea unui anumit cadru reprezentaţional al faptului matematic etc.

rezolvată logicist în TLP, va depinde orientarea ulterioară a filosofiei wittgensteiniene a matematicii (FWM) spre intuiţionism, formalism, verificaţionism etc. Limbajul formal poate oferi el însuşi resurse şi autonomia necesară pentru rezolvarea problemelor matematice, însă felul în care este legat de domeniile conexe matematicii (fizică, tehnologie etc) îl face capabil să „ofere intuiţii", să posede disponibilităţi de calcul, autonomie, metode proprii de rezolvare. De aceea în TLP (ca şi în perioada ulterioară) calculul matematic nu este un experiment[9], el nu verifică, nu probează, ci pur şi simplu e un mecanism ce funcţionează (aici, cu metodele logicii).

De pildă matematica studiază structura propoziţiei „2+2" şi structura propoziţiei „4" şi constată că sunt identice (au aceeaşi semnificaţie). Atât face matematica, nu altceva şi asta va considera Wittgenstein că este misiunea matematicii în toată FWM: să vadă cum rezidă în limbaj intuiţia unor fapte de genul „2+2 = 4". Această misiune în TLP e fundamentată logicist, mai târziu apar alte abordări reprezentaţioniste cu scopul de a surprinde intuiţia respectivă. În TLP matematica se reduce la logică, este o metodă a logicii (6.2, 6.234), unde adevărul unei propoziţii logice se recunoaşte numai după simbolul său care conduce la tautologie, simbol care se arată, punând în lumină proprietățile sale structurale (6.113, 6.12); structura numărului natural se fundează pe forma generală a propoziţiei (un tip de reprezentaţionism); mai târziu calculul e un joc de limbaj (din logicist devine matematist), ba chiar se întâmplă răsturnarea ca *matematicul* să devină un cadru mai general, mai fundamental decât *logicul*.

Ideea că propoziţiile matematicii diferă de celelalte propoziţii ale limbajului prin faptul că asupra lor se poate decide prin metode pur sintactice (realism intensional) va fi un punct de vedere constant al FWM. Dacă propoziţiile limbajului sunt imagini ale lumii şi limbajul se raportează, se confruntă cu lumea (2.223), iar o propoziţie e adevărată sau falsă după cum ceea ce afirmă se produce sau nu în realitate (4.05, 4.06), adevărul unei propoziţii matematice ţine de coerenţa sistemului formal, reprezentaţional. Adevărul unei propoziţii matematice se decide prin mijloace pur formale având la bază *forma generală a propoziţiei* şi *forma generală a operaţiunii logice*.

TEORIA FORMALĂ A TLP

Termenul de Operator logic (Operaţiune[10]) joacă un rol central în generalizarea semnului propoziţional şi constituie nucleul logicist al *Tractatusului*.

Doresc mai întâi să stabilesc o terminologie unitară în ce priveşte funcţia de adevăr, operaţiunea (operatorul de adevăr) şi propoziţiile logice, în felul următor:

– O *funcţie binară de adevăr* poate fi definită astfel: f_i: $\{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$, şi se obţin cele 16 funcţii ale Spaţiului Logic determinat de două propoziţii atomare ($SL_{p,q}$);

[9] 6.1222, 6.1251, 6.1261, 6.1262, 6.22, 6.2331b („Calculul – matematic, n.n. – nu este un experiment") etc.

[10] Prefer să traduc *Operation* prin *Operațiune* pentru a evidenția rolul ei activ, de transformare a funcțiilor propoziționale.

– O *propoziţie* a logicii, sau o *funcţie de adevăr* este rezultatul acțiunii unei *operaţiuni* asupra *bazelor sale* (propoziţiilor elementare) (cf. 5.21, 5.234); Wittgenstein vorbeşte mai întâi despre *propoziţii*, apoi le asimilează *funcţiilor logice*.

– *Operaţiunea* ţine de „construcţia logică a propoziţiei” (5.233) „se relevă într-o variabilă” (5.24), „arată modul în care se poate ajunge de la o formă propoziţională la alta” (5.24). Aşadar, o operaţiune logică e un mecanism care preia o anumită propoziţie sau funcţie logică, cu tot cu bazele sale, ca să o transforme într-o altă propoziţie; operaţiunile ne dau expresia generală a anumitor relaţii formale. „Negaţia, suma logică, multiplicaţia logică etc., sunt operaţiuni” (5.2341). Astfel toate funcţiile de adevăr sunt rezultatul aplicării operaţiunilor la propoziţiile elementare. În plus, tot operaţiunile logice sunt răspunzătoare de faptul că din funcţii de adevăr se obţin alte funcţii de adevăr, prin *operaţiuni de compunere ale acestora* (ca să mă exprim astfel); se permite acest lucru (cf. 5.3) deoarece aplicarea unei operaţiuni de adevăr la rezultatul altei operaţiuni deja aplicate la propoziţiile elementare, transportă efectiv acţiunea operaţiunii asupra bazelor de adevăr respective; aşadar compunerea operaţiunilor e la fel de riguroasă, având aceleaşi baze.

TLP 5.3 afirmă: „... În conformitate cu esenţa operaţiunii de adevăr, tot aşa cum din propoziţii elementare se produc funcţiile lor de adevăr, din funcţiile de adevăr se produce o nouă funcţie de adevăr. Orice operaţiune de adevăr produce din funcţiile de adevăr ale propoziţiilor elementare o nouă funcţie de adevăr. Orice operaţiune de adevăr produce din funcţiile de adevăr ale propoziţiilor elementare o nouă funcţie de adevăr a propoziţiilor elementare, o nouă propoziţie. Rezultatul fiecărei operaţiuni de adevăr efectuate asupra rezultatelor operaţiunilor de adevăr cu propoziţiile elementare este din rezultatul *unei* operaţiuni de adevăr cu propoziţii elementare...”.

Adică, oricum s-ar aplica unele operaţiuni dar şi oricum am compune funcţiile de adevăr (după legea unei operaţiuni) nu se poate obţine decât o structură prestabilită, una din cele posibile, aflată în componenţa SL, ca şi cum o operaţiune s-ar aplica propoziţiilor elementare.

5.31 întăreşte acest fapt: „Schemele de la 4.31[11] au semnificaţie chiar dacă „p”, „q”, „r” nu sunt propoziţii elementare.”

Iar diferenţa decisivă dintre *operaţiune* şi *funcţie de adevăr*, spre a se evita paradoxurile, este stabilită de 5.251: „O funcţie nu poate să fie propriul ei argument, pe când rezultatul unei operaţiuni poate să devină propria ei bază.”

Formal: $O_k(f_k(p,q)) = O_k(p,q) = f_k$; $O_k(f_i(p,q), f_j(p,q)) = O_k(f_i, f_j) = (f_i f_j)_k$ adică f_i compus cu f_j după O_k; $O_i(f_k, (O_j(f_s, f_t)) = O_i(f_k, (f_s f_t)_j) = (f_k (f_s f_t)_j)_i$.

O propoziție (funcție propozițională) și operațiunea corespunzătoare au aceeași structură internă a stării de lucruri (Sachverhalte) (deci reflectă același fapt din spațiul logic); ambele depind de bazele spațiului logic (p, q), dar operațiunea e acțiunea și funcția e rezultatul aplicării operațiunii asupra bazelor. De aceea funcțiile propoziționale nu se pot compune, ci doar operațiunile, consideră Wittgenstein.

---

[11] Unde se reprezintă matriceal posibilitățile de adevăr pentru una, două și trei propoziții elementare.

Faptul că operaţiunea ca atare nu asertează, ci doar conduce la un rezultat (v.5.25) arată pe de o parte diferenţa dintre o operaţiune (care nu vizează un sens, ci o acţiune) şi o propoziţie, care vizează un sens, ca şi diferenţa dintre operaţiune şi funcţie (v.5.251), cum s-a discutat mai sus. Esenţială este „înaintarea într-un şir de forme în ierarhia lui Russell şi Whitehead" (v.5.252), ceea ce (prin trecerea de la un tip la altul) ar trebui să asimileze măcar formal teoria tipurilor.

Pe de altă parte, nu există operaţiuni 1-are, 2-are, ..., n-are, mai exact nu se definesc operaţiunile în acest mod, pentru a se evita definiţia circulară: deoarece numărul va fi definit ca fiind *exponentul unei operaţiuni logice* (6.021), operaţiune care se aplică, consider, unui univers combinatoriu, generat de un şir oarecare de propoziții elementare. Iar rezultatul unei operaţiuni va aserta o altă stare de lucruri în funcție de bazele de la care s-a plecat.

Între propoziţiile SL există „relaţii interne" sau „relaţii formale" ale structurilor, cum le numeşte Wittgenstein în repetate rânduri. Relaţiile interne reies din faptul că există operaţiuni care transformă propoziţiile: fiecare p_i poate fi generată de alte sisteme de operaţiuni care constituie un „sistem complet de operațiuni"; ba chiar există două operaţiuni, Sheffer şi Nicod, din care pot rezulta toate celelalte funcţii propoziţionale prin aplicarea uneia singure asupra propoziţiilor elementare. Problema la care caută să răspundă Wittgenstein este aceea privind modul general de acțiune al unei astfel de operaţiuni. În continuare voi studia acest mod de acțiune și voi cerceta dacă el admite o formă generală care să stea la baza definirii numărului natural (ceea ce constituie elementele de bază ale logicismului tractatrian).

GENERALITATEA LOGICII

Consider că există două direcţii de proliferare sau generalizare a semnului propoziţional şi deci a propoziţiilor care structurează SL. Pe de o parte, modul de definire al operaţiunii face posibilă aplicarea succesivă a unei operaţiuni *O'*[12] asupra propriilor ei rezultate *O'(O'(O'...)...)* (v. 5.2521) ceea ce înseamnă „a înainta într-un şir de forme" (5.25) deoarece operaţiunea poate deveni propriul ei argument, spre deosebire de funcţii[13] (5.251); aceasta pentru a evita paradoxurile teoriei mulţimilor şi a respinge necesitatea introducerii teoriei tipurilor de către Russell; este calea pe care merge Wittgenstein în TLP.

[12] *Operaţiuni* (de adevăr) sunt considerate a fi: negaţia, suma logică, multiplicaţia logică etc., adică toate cele 16 stări de lucruri posibile cu aceeași structură internă ca și funcțiile de adevăr. Precauţiile lui Wittgenstein referitor la diferenţa dintre operaţiune de adevăr şi funcţie de adevăr e numai una metodologică, pentru a evita paradoxurile teoriei mulţimilor.

[13] Ceea ce arată că la Wittgenstein conceptul de *funcţie* (logică) nu este cel clasic matematic. (Fiindcă uzual se poate defini o funcţie logică, f: $\{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$, și să aibă loc compunerea unei funcţii cu sine, fof). *Operaţiunea* la Wittgenstein ar fi mai degrabă un operator definit pe mulţimi de funcţii logice, iar *O(f) = O(f1, f2,..., fn) = Of*, unde *f* are aceeași structură ca *O*, adică un operator aplicat unei funcţii logice ar da operatorul *acelei* funcţii. Operaţiunea de adevăr *O'x* e cel mai aproape de felul în care se poate modela compunerea entităţilor logice de tip matrice/tabel, asemănător cu un *funcţional* matematic (cum e λ-calculul).

Pe de altă parte filosoful lasă posibilitatea de a se dezvolta semnul propoziţional prin combinarea propozițiilor logice după legea fiecărei operațiuni, urmând aceeaşi metodă ce generează pe baza structurilor interne aşa-numitul „tabel al lui Wittgenstein": în acest sens eu propun compunerea funcţiilor de adevăr două câte două, după fiecare lege sau operaţiune, în funcţie de numărul de propoziţii elementare care reprezentaţionează realitatea. Va rezulta în acest caz un Univers Logic (UL) autogenerator și combinatoriu. De pildă, având ca bază $SL_{p,q}$ (un spațiu logic cu două propoziții atomare) și 16 operațiuni (propoziții) logice se pot genera 16 tabele a câte 256 propoziții logice.

Wittgenstein consideră că se poate înainta într-un şir de forme prin generarea unor propoziţii care se obţin prin negarea conjuncţiei tuturor propoziţiilor considerate până atunci, folosind forma generală a propoziţiei (v.6), procedeu care seamănă izbitor cu *metoda diagonalei* a lui Cantor de demonstraţie a existenţei unor numere aparte, deosebite de cele raţionale, prin evidenţierea unui număr „diagonal", diferit de toate cele din colecţia iniţială; de altfel, Wittgenstein va combate ca neriguroase astfel de procedee extensionaliste ale matematicii.

Altfel stau lucrurile cu construcţia activă din propozițiile existente dintr-un SL a „altei forme logice", încadrabilă într-o structură mai vastă logico-matematic, pe care am numit-o Univers Logic, ceea ce generalizează Spațiul Logic considerat o bază de plecare. Consider că aceasta este cea mai generală situație în care se poate dezvolta semnul propoziţional de sorginte wittgensteiniană (linie pe care nu o voi dezvolta în acest studiu).

Când Wittgenstein pune problema „înaintării într-un şir de forme", nu exclude posibilitatea ca o operaţiune să fie 1-ară şi singura răspunzătoare de dezvoltarea SL, dar Wittgenstein nu-şi pune expres problema unui sistem complet de operațiuni (cum ar fi operaţiunea Nicod, Sheffer, ori sistemul conjuncţie-negaţie etc.) ci vorbeşte la modul general despre o operaţiune *oarecare*. Aceasta se poate aplica unui număr indefinit de propoziţii care pot angrena sau se pot supune acestei operaţiuni numai dacă au o bază şi o structură internă corespunzătoare, adică dacă fac parte din acelaşi SL.

Wittgenstein merge pe prima cale, de tip „diagonal": notează „termenul general al unui şir de forme" a, $O'a$, $O'O'a$,...., sau pe scurt prin variabila „$[a, x, O'x]$" unde: *a* este primul termen al şirului, *x* un termen oarecare şi *O'x*, cel care urmează imediat lui *x* în şirul formal. (v. 5.2522). Conceput astfel, un şir de forme deja ne sugerează un anumit drum de înaintare prin faptul că avem de-a face cu o operaţiune repetată, una oarecare (sau poate *una* anume, iarăşi nu se precizează de la început), sau dimpotrivă, poate fi vorba de *toate* operaţiunile pe care le obţin *a priori* din SL şi se aplică unor baze propoziţionale. În acest studiu voi cerceta toate aceste eventualități pentru a vedea dacă există vreo cale spre generalizarea vizată.

Wittgenstein consideră că ceea ce urmează într-un şir propoziţional şi vine ca o altă propoziţie, obţinându-se din cele anterioare, e conjuncţia negatelor acestora. Intuitiv e vorba de o negare a unei totalităţi[14]. Operaţiunea în discuţie nu poate fi

[14] Ceea ce explică Russell în prefaţa TLP, critică Anscombe (v. *op.cit.* sqq.) şi dimpotrivă, apreciază Frascolla (v. *Op.Cit.* sqq.).

decât unul din operatorii Sheffer sau Nicod[15]; de aici lucrurile merg într-un singur sens în ce priveşte *semnul propoziţional generalizat* (SPG) al lui Wittgenstein.

*

Un şir *a*, *O'a*, *O'O'a* ... are forma generală (*a*, *x*, *O'x*); după cum se explică la 5.2522 şi 4.1273, „primul termen al expresiei dintre paranteze este începutul şirului de forme, al doilea forma unui termen *x* oarecare al şirului, iar al treilea forma acelui termen al şirului care îi urmează nemijlocit lui *x*".

La 4.1273 Wittgenstein discută efectiv despre geneza *formei generale a unei operaţiuni* (propoziţii) şi ideea se pare că i-a venit pe baza celei de „concept formal", sinonim cu „termenul general al unui şir de forme", care reprezintă o variabilă (cum x^2 este conceptul formal al şirului 1, 4, 9, 16, 25....).

Afirmaţia de la 4.1237 („putem determina termenul general al şirului de forme indicându-i primul termen şi forma generală a operaţiunii care generează termenul următor din propoziţia precedentă"), arată (spre deosebire de 5.2522) că nu mai e nevoie de al doilea termen *x* din formula de la 5.2522, precum şi că operaţiunea aplicată unei propoziţii o transformă în altă propoziţie şi aşa mai departe. Formalismul pus la punct în TLP caută să fie independent de orice număr particular (4.128), pentru a evita cercurile vicioase în care au căzut Frege şi Russell în definirea numărului natural.

La 6.01 forma generală a operaţiunii este $\Omega'(\bar{\eta}) = [\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'(\bar{\eta}) = [\bar{\xi}, \bar{\eta}, N(\bar{\xi})]$ iar explicaţia formalismului e dată la 5.5, 5.501, 5.502: „Fiecare funcţie de adevăr este un rezultat al aplicării succesive a operaţiunii $(\_\_\_\_\_A)$(ξ, ...) la propoziţii elementare. Această operaţie neagă toate propoziţiile din paranteza din dreapta, şi o numesc negaţia acestor propoziţii." (5.5)

„Eu notez o expresie între paranteze, ai cărei termeni sunt propoziţii – când ordinea termenilor în paranteză este indiferentă – printr-un semn de forma „($\bar{\xi}$)". Semnul „($\bar{\xi}$)" este o variabilă ale cărei valori sunt termenii expresiilor din paranteză; iar linia de pe variabilă înseamnă faptul că ea reprezintă (reprezentaţionează, *vertreten*, n.n.) toate valorile sale din paranteză. (Deci, dacă ξ are trei valori P, Q, R, atunci ($\bar{\xi}$) = (P, Q, R)..." (5.501).

Pentru a studia cum funcționează formalismul avut în vedere de Wittgenstein, rescriu 5.5 după sistemul particular al structurii interne a unui SL generat de două propoziţii atomare SL(p,q): „Fiecare funcţie de adevăr este un rezultat al aplicării succesive a operaţiunii (1,0,0,0) (ξ,....) la propoziţii elementare. Această propoziţie neagă toate propoziţiile din paranteza din dreapta şi o numesc negaţia acestor propoziţii."

---

[15] Ceea ce Wittgenstein şi exegeza consideră a fi operatorul Sheffer, este asimilat operatorului Nicod, aşa cum s-a consacrat în literatură. Îl voi nota cu simbolul ∫ fără să îl mai denumesc în vreun fel: ∫(p,q) ≡ $\bar{p} \cdot \bar{q}$; trebuie precizat că Sheffer demonstrează (1912) că există două funcţii de adevăr depinzând de două variabile (sau propoziţii atomare în limbajul TLP) cu nişte proprietăţi deosebite. Cu doar una dintre ele se poate defini disjuncţia şi negaţia, astfel încât fiecare devine funcţie primitivă în sistemul deductiv din *PM*. J. Nicod în 1916 (*A Reduction in the number of the Primitive Propositions of Logic*, în *Procedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. XIX) fundamentează teoria deducţiei cu ajutorul unei singure axiome, folosind una din funcţiile lui Sheffer.

Formal, (1,0,0,0)(p,q) = $\sim p \cdot \sim q$ = *N*(p,q) (sau ∫(p.q)) cf. 5.502; aici „structura internă” a operaţiunii este (1,0,0,0)[16]. Tabelar, operațiunea în discuție se reprezintă astfel:

p	q	*N*(p,q)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Afirmația 5.501 explică formalismul lui $\bar{\xi}$: e vorba de o totalitate de valori ale lui ξ; să zicem că ξ ia două valori, deci $\bar{\xi}$ = (p,q). Aşadar, $\sim p \cdot \sim q$ = *N*(p,q) = N($\bar{\xi}$); şi deci cf. 5.2522, 5.5, 5.501, 5.502 se înţelege care ar fi dezideratul înaintării unui şir formal de operaţiuni aplicate unor propoziţii sau bazelor unor propoziţii:

$\Omega'(\bar{\eta}) = [\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'(\bar{\eta}) = [\bar{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. (operațiunea Ω' dispune de o bază de plecare, $\bar{\xi}$ și de o lege internă, $N(\bar{\xi})$; aplicată unui alt sistem de propoziții, $\bar{\eta}$, îl preia pe acesta și îl asimilează (transformă) într-o nouă structură conform legii interne a operațiunii *N*. Baza de înaintare a operațiunii astfel se îmbogățește.

Același rezultat se poate obține considerând acțiunea unei operațiuni asupra unor propoziții atomare; folosind scrierea după care o totalitate e reprezentaționată printr-un simbol cu o bară deasupra, $\bar{o}(\bar{p}) = p$, adică o totalitate de operaţiuni aplicată unei totalităţi de propoziţii atomare conduce la o propoziţie constituentă sistemului dat (sau generat de o totalitate de propoziții elementare). Ea s-ar putea reprezentaţiona mai sugestiv ca variabilă, astfel: $o_{o_{o_{\cdots o}}}$(ξ......) (cf. 5.501); o dată cu ordinul operaţiunilor trecut ca indice (sau ca putere) se poate proceda la definirea numerelor naturale în acelaşi stil ca la 6.02. Conform formalismului din TLP, formula de mai sus s-ar scrie: $(o_i(\Omega\ \bar{\eta}))$ $(\bar{\xi})$ = $o_i(\bar{\xi}\Omega\ \bar{\eta})$, unde o nouă operaţiune, de indice *x*, se obţine astfel: o_x (*pi* o_i *pj*) = $(o_i)o_i(o_j)$, dar fără să particularizez în vreun fel operaţiunea o_i; Diferența e că SL se „îmbogățește” cu aceleași propoziții, dar dispuse în matrice de structuri diferite, față de calea urmată de Wittgenstein care crede că obţine noi propoziţii din cele existente; în ultimul caz voi arăta că structura internă a operaţiei *N*, acţionând liniar *N*(*N*(...($\bar{\xi}$)))...) (această acţiune va sta la baza definirii numărului natural) nu conduce la propoziţiile preexistente în spaţiul logic, ci, după câteva iteraţii, operaţia *N* nu mai produce înaintarea preconizată.

CONTROVERSE LEGATE DE FORMA GENERALĂ A OPERAȚIUNII

Discuţiile legate de forma generală a operaţiunii şi a propoziţiei sunt excesiv de subtile. Primul comentator şi interpret al afirmaţiei (6), contestat inclusiv de Wittgenstein este însuși Russell. Afirmaţia notată (6) debutează cu: „Forma generală a funcţiei de adevăr este [$\bar{p}$, $\bar{\xi}, N(\bar{\xi})$]”, ceea ce constituie şi „forma generală a

[16] E vorba de O_9 din tabelul lui Wittgenstein așa cum va apărea mai jos, sau operatorul lui Nicod.

propoziţiei”. Ea spune că totalitatea propoziţiilor „este rezultatul aplicării succesive a operaţiunii $N'(\bar{\xi})$ la propoziţii elementare. (6.001). Prin aplicarea succesivă a *operaţiunii* $N(\bar{\xi})$ la *propoziţiile elementare*, $\bar{\xi}$, s-ar obţine mereu o altă propoziţie. Iată interpretarea lui Russell[17]:

„$\bar{p}$ reprezintă toate propoziţiile atomice.

$\bar{\xi}$ reprezintă tot ansamblul propoziţiilor.

$N(\bar{\xi})$, „... reprezintă negaţia tuturor propoziţiilor compuse cu $\bar{\xi}$. Simbolul complet [$\bar{p}$, $\bar{\xi}, N(\bar{\xi})$] semnifică tot ce se poate obţine făcând o alegere oarecare de propoziţii atomice şi negându-le pe toate, apoi făcând o alegere oarecare din ansamblul de propoziţii originale – şi aşa mai departe, indefinit.”[18]

Aceste explicații par să nu fie tocmai în acord cu Wittgenstein, fiindcă mai corect ar fi să se spună că fiecare propoziţie este rezultatul aplicării operațiunii Sheffer (Nicod) la ansamblul $\bar{\xi}$, ansamblu de funcţii care depinde de toate propoziţiile elementare $\bar{p}$; propoziţia „nouă” obţinută după primul pas se adaugă primei baze, şi operația continuă; totuşi, aşa cum voi arăta, acest procedeu, dacă e pur liniar, se „îneacă” după câtiva paşi, deoarece acţiunea operațiunii *N*, pentru a genera o propoziţie nouă, se bazează pe organizarea internă a argumentelor sale. Astfel, se poate scrie:

– dacă *N* acţionează în felul următor: *N*(*N*(p,q), *N*(p,q)), atunci se obţine pVq;

– dacă *N* acţionează *N*[*N*(*N*(p,p),q), *N*(*N*(p,p),q)] atunci se obţine p→q; şi atunci, sensul lui *N*($\bar{\xi}$) evident că depinde de modul său de acțiune, de felul în care angrenează în structurile interne ale variabilelor propoziţionale.

Anscombe este vehementă la această interpretare a lui Russell[19]. Şi pentru pioniera exegezei formalismului TLP, $\bar{p}$ stă pentru întrega colecţie de propoziţii elementare; $\bar{\xi}$ este marca unei interpretări informale (şi după ce se vor putea utiliza numere, va sugera aplicarea operaţiunii *N* de *n* ori asupra bazelor de propoziţii elementare; de asemenea, liniuţa de deasupra variabilelor arată că e vorba de o listă prescrisă de valori ale variabilei; aici, Anscombe subliniază că avem de-a face cu o listă şi nu cu o singură propoziţie, în afară de cazul degenerat şi de asemenea că $N(\bar{\xi})$ este rezultatul aplicării operaţiunii *N* la valorile variabilei, constând într-o singură propoziţie. *N* este operaţiunea prin care se obţine conjuncţia negatelor propoziţiilor la care se aplică, deci un fel de simbol Sheffer extins (l-am numit *negaţie multiplicativă*). Se poate observa până acum că interpretarea lui Anscombe nu este chiar atât de departe de felul în care priveşte Russell expresia formei generale a funcţiei de adevăr [$\bar{p}$, $\bar{\xi}, N(\bar{\xi})$].

Inovaţia lui Anscombe constă în încercarea de a explica modul de generare a SL prin aplicaţiile succesive ale operaţiunii $N(\bar{\xi})$. În cazul concret constituit de două propoziţii elementare, aşa cum preferă să dea exemplu, Anscombe caută să

[17] TLP 1961.

[18] Betrand Russell, *Introducere*, TLP 1961.

[19] Cu interpretarea lui Russell cade de acord Frascolla, unul din cei mai avizați exegeți de ultimă generație!

regăsească termenii celor 16 propoziţii/funcţii de adevăr şi a celei care urmează, a şaptesprezecea, care nu poate să fie decât o funcţie din cele obţinute, fiindcă toate funcţiile noi se vor înfăşura pe mosorul $SL_{p,q}$ constituit din cele 16 propoziţii.

Expresia [$\bar{p}$, $\bar{\xi}, N(\bar{\xi})$] este scrisă în cazul a două propoziţii elementare p, q, imediat sub forma [p, q, $N^n(p.q)$, N^{n+1}(p,q)]; acest termen general se dezvoltă secvenţial, prima secvenţă fiind în mod natural [p, q, $N(p.q)$, $N(N(p.q))$] = [p, q, $\bar{p}\cdot\bar{q}$, pVq]; dacă următorul termen ar fi *N*(pVq) adică $\bar{p}\cdot\bar{q}$, şirul s-ar bloca; dacă operaţia *N* s-ar aplica celor două rezultate de până acum, *N*(*N*(p, q), *N*(*N*(p, q))), ar rezulta contradicţie; ce-i drept, ar fi un termen nou, dar la următoarea aplicare se obţine tautologie şi şirul s-a blocat; pentru a nu se obţine iarăşi contradicţie şi tautologie, Anscombe încearcă să combine primele patru rezultate, luate şi câte trei, dar şirul rămâne blocat. De aceea caută acele valori ale lui ξ care să ducă mai departe şirul de valori şi alege ca bază de înaintare primul element al bazei, adică *p*, cu primul rezultat al aplicării operaţiei, adică *N*(p,q). Aşadar, va rezulta:

„N((N (p, q)), p), (adică) ~ (~p· ~q). ~ p, (adică) pVq·~p, i.e q[20]. Următoarea aplicaţie, N(N((N (p, q)), p), neagă pe cea anterioară şi dă ~q”.[21]

Dar dincolo de toate acestea, într-un mod cu totul forţat (prin rearanjări succesive) Anscombe încearcă ajustarea bazei de plecare cu rezultatele aplicărilor succesive ale lui *N*, renunţând la valorile obţinute dacă ele se repetă şi păstrându-le dacă se obţine o funcţie nouă. Cu toată încrederea pe care şi-o exprimă autoarea în proliferarea şirului iniţial şi că acest calcul ar avea sens pentru orice bază finită, aceasta nu se produce, din cauze pe care le voi arăta: ordinea de acţiune a lui *N* nu este una care să permită un algoritm, un calcul mecanic.

„Vom lua ca valori pentru ξ orice rezultate care nu au fost luate împreună până în prezent - desigur, nu ne vom limita doar la una sau două valori ale lui ξ de la un moment dat, dar vom utiliza toate combinaţiiile posibile într-o ordine sistematică. Este clar că putem avea aici o serie cu o ordine clară, dacă presupunem că ne sunt date bazele originale într-o anumită ordine. Aceasta, desigur, este motivul exact pentru care Wittgenstein spune la 5.242 că ’"p", "q" şi "r" sunt variabile care ne dau expresia generală a anumitor relaţii formale’.”[22]

Există câteva sugestii interesante ale încercării lui Anscombe, de factură tipic reprezentaţionistă, aşa cum am caracterizat întregul formalism din filosofia wittgensteiniană a matematicii (FWM): e vorba de tabelul[23] în care se defineşte, pentru un număr arbitrar de propoziţii elementare, operaţia $N(\bar{\xi})$:

[20] Rezultatul este eronat, pVq·~p nu dă q, o eroare inexplicabilă sau poate o greșală de tipar! Corect este ~(q→p). Oricum la următorii pași șirul se blochează.

[21] Anscombe, G.E.M., *An Introduction toWittgenstein`s Tractatus*, second edition, revised, The Academy Library Harper & Row, Publishers, New York, 1963, p. 134.

[22] *Ibidem*.

[23] *Ibidem*, p. 135.

p	q	r	s	t	v	.	.	.	.	.	.	.	.
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	.	F
F	T	T	T	T	T								F
T	F	T	T	T	T								F
F	F	T	T	T	T								F
T	T	F	T	T	T								F
F	T	F	T	T	T								F
T	F	F	T	T	T								F
F	F	F	T	T	T								F
T	T	T	F	T	T								F
F	T	T	F	T	T								F
T	.	.	$\overbrace{F_s'}^{8}$	$\overbrace{T_s'}^{16}$	$\overbrace{T_s'}^{32}$								.
F	.	.	.										.
T	.	.	.										.
F	.	.	.										.
T	.	.	.										.
F	.	.	.										.
T	.	.	.										.
F	.	.	$\overbrace{F_s'}^{8}$	$\overbrace{F_s'}^{16}$	$\overbrace{F_s'}^{32}$								.
T	T	F	F	F	F	F	F						F
F	T	F	F	F	F	F	F						F
T	F	F	F	F	F	F	F						F
F	F	F	F	F	F	F	F					F	T

Tabelul constituie SL pentru un număr neprecizat de propoziţii elementare. Ultima coloană reprezintă funcţia $N(\bar{\xi})$, deoarece conjuncţia negaţiei tuturor valorilor de adevăr ale propoziţiilor elementare, va genera „adevăr", („true") doar în ultima căsuţă, după cum se observă din ultima linie a tabelului. Astfel, noi „înţelegem" cum a fost obţinut acest tabel şi ce rol are el. Anscombe scrie: „Prin urmare, aplicarea repetată a acestei operaţiuni la bazele date va genera în orice caz finit, toate valorile de adevăr ale funcţiei, şi dacă ar fi posibil de a se specifica mulţimea de propoziţii altfel decât prin enumerare, atunci ar fi foarte natural să spunem: contează că numărul elementelor mulţimii este necunoscut sau că este infinit?"[24]

Dacă admitem că prin aplicarea repetată a operaţiunii *N* ar începe să se genereze toată seria de propoziţii din SL, se poate întâmpla ca într-o serie infinită să nu mai apucăm să „coborâm" fiecare nouă propoziţie obişnuită din şirul celor vechi, aşa încât procedeul să se reia pe următoarea coloană. „Scăparea" ar consta în faptul, susţine Anscombe, că nu ar fi nevoie să ajungem la capătul şirului, fiindcă „mai repede" s-ar obţine fie o tautologie, fie o contradicţie, fie propoziţii deja obţinute. Iar „metoda" de a înainta în şir ar varia de la caz la caz, din câte se înţelege. Rămân două obiecţii, chiar în formularea autoarei: primul conflict e cu teorema lui Cantor (pe care Wittgenstein o va critica ulterior TLP): pe scurt, în forma generală a funcţiei de adevăr, [$\bar{p}$, $\bar{\xi}, N(\bar{\xi})$], cardinalul lui p este *n* (să zicem),

[24] *Ibidem*, p. 136.

iar cardinalul lui $\bar{\xi}$ este 2^n; în cazul în care avem o mulţime infinită de propoziţii elementare, de cardinal $\aleph_0$, numărul funcţiilor de adevăr obţinute va fi de $2^{\aleph_0}$; „Prin urmare, calculul prin care se corelează seria de funcţii de adevăr cu o mulţime de propoziţii elementare ale seriei numerelor naturale, cum susţine Wittgenstein, trebuie să fie greşit”.[25]

A doua obiecţie evocată de autoare e un rezultat al lui Church din 1930 după care teoria cuantificării multiple nu admite nicio procedură de decizie; având toate tautologiile (sau adevărurile logicii) privite ca funcţii de adevăr a propoziţiilor elementare, nu există o metodă prin care să se testeze dacă orice formulă bine formată este sau nu o teoremă.

O PROBLEMATIZARE A ACȚIUNII FORMEI *N*(P,Q) ŞI MODURI DE CALCUL[26]

Operaţiunea *N*[27] pentru două variabile, aşa cum o aplică Wittgenstein, Russell şi cad de acord exegeţii, are tabelul de adevăr[28]:

p	q	*N*(p,q)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Conform 6.01 („Forma generală a operațiunii este $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'(\bar{\eta}) = [\bar{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. Aceasta este forma cea mai generală de trecere de la o propoziție la alta.”) ar trebui ca *N*(p,q)(r) să fie *N*(p,q,r), ceea ce nu generalizează decât formal[29] trecerea de la 2 la 3 variabile (și așa mai departe). Se pune întrebarea dacă există o astfel de lege generală a cărei acțiune să poată fi particularizată în orice SL astfel ca în urma aplicării operațiunii în mod succesiv, iterativ, să se obțină toate propozițiile acelui SL (și așa mai departe pentru un SL de *n* dimensiuni). S-a arătat mai sus analizând părerile unor exegeți că încercarea de a particulariza acțiunea lui *N* este un eșec. Conform acestei analize forma generală a operațiunii e numai un aranjament grafic, fără altă realitate, adică semnul propozițional generalizat wittgensteinian nu reprezintă[30]. Voi relua în continuare analiza de mai sus prin încercarea de a înțelege și a optimiza mecanismul de acțiune a operațiunii *N*(p,q).

---

[25] *Ibidem*, p. 137.

[26] Aerul desuet al acestor calcule provine din tentativa de a împrăștia coerența obscură a unui formalism irațional, absurd (cum îl va socoti Wittgenstein în finalul *Tractatusului*).

[27] Precizez câteva notații echivalente, comode în calcule: $\bar{p} \cdot \bar{q}$, p↓q, *N*(p,q), ∫(p,q), ~(pVq).

[28] Sau *N*(p,q) = (1.0.0.0).

[29] 6.01 doar indică forma de trecere de a o propoziție la alta. Fiindcă în realitate extinderea lui *N* blochează înaintarea formală.

[30] Acest fapt ar putea să nu-l deranjeze pe Wittgenstein dacă s-ar încadra într-un reprezentaționism formal coerent la nivel sintactic. Dar aceasta nu se petrece.

Pentru început, doresc să stabilesc relația formală dintre negația multiplicativă. *N*, și simbolul ∫, ținând cont de faptul că $N = N(p_1, p_2, ..., p_x) = \bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 \cdot \cdot \bar{p}_x$ (*N* se aplică unei multitudini sau totalități de variabile propoziționale, dar practic nu pot grupa variabilele decât două câte două (așa cum acționează ∫ = ∫(p,q)); așadar ca să aplic *N*, trebuie să apelez la ∫.

$N(p_1, p_2) = \int(p_1, p_2)$;

$N(p_1, p_2, p_3) = \int(\sim\int(p_1, p_2), p_3) = \int((\int(p_1, p_2), \int(p_1, p_2), p_3) = \int(\mathrm{V}(p_1, p_2), p_3))$;

Am folosit identitățile $\sim\int(p_1, p_2) = \sim(\sim p_1 \cdot \sim p_2) = p_1 \mathrm{V}\ p_2$ și $\sim\int(p_1, p_2) = \int(\int(p_1, p_2), \int(p_1, p_2)) = \int(\sim p_1 \cdot \sim p_2, \sim p_1 \cdot \sim p_2) = \sim(\sim p_1 \cdot \sim p_2) \sim(\sim p_1 \cdot \sim p_2) = p_1 \mathrm{V}\ p_2$; Pe scurt, ~∫=V și ~∫=∫(∫, ∫);

$N(p_1, p_2, p_3, p_4) = \int(\sim\int(\sim\int(p_1, p_2), p_3), p_4)$;

.....

$N(p_1, p_2, p_3, p_4,..., p_k) = \int(\sim\int(\sim\int(\sim\int(.....(\sim\int(p_1, p_2), p_3), p_4), ... p_k)$; (cu k-1 folosiri ale simbolului ∫ și negația ~ folosită de k-2 ori.

Se mai poate scrie $N(p_1, p_2, p_3, p_4,..., p_k) = \sim\mathrm{V}(\mathrm{V}(...\mathrm{V}((p_1, p_2), p_3), p_4), ... p_k)$.

Astfel de transformări sunt utile deoarece 6.02 unde se face trecerea de la formalismul logic la numere, poate fi tradusă astfel: *x* = (p,q) – baza de plecare; $N(x) = p_i$; $N(N(x)) = N(x, p_i) = p_j$; $N(N(N(x))) = N(x, p_i, p_j) = p_k$; … $N(N(N(...N(x)...)) = N(x, p_i, p_j,..., p_k,..)$ cu $x, p_i, p_j,..., p_k,..$ reprezentând mulțimea propozițiilor din SL, inclusiv contradicția și tautologia. Aceste rezultate sugerează generarea de noi propoziții. Dar este reală această posibilitate?

Procesul de generare a tuturor propozițiilor dintr-un $SL_{p,q}$ se poate studia din două perspective: direct, prin generarea pas cu pas a propozițiilor din spațiul logic după legea lui *N*(p,q) și în al doilea rând, prin studiul structurii interne a operațiunii respective.

Să ne oprim la $SL_{p,q}$ cu bazele sale *p*, *q* și operațiunea ∫(*p*,*q*), celelalte propoziții – p_x,..., etc., fiind încă neprecizate:

p	Q	∫(p,q) = $p_\int$	p_x	p_y	p_z	p_u	...
0	0	1					
0	1	0					
1	0	0					
1	1	0					

Spațiul logic este dat deodată, căci el reprezintă toate stările de lucruri posibile (Sachverhalten) generate de stările de lucruri elementare (Elementarsatz). Se cunoaște faptul *a priori* că pornind de la 2 propoziții atomare, se obțin 2^{2^2} funcții propoziționale. Dar nu orice operațiune de adevăr are puterea de a genera singură acest spațiu logic. Presupun aici că avem la dispoziție doar propozițiile elementare *p*, *q* și operațiunea ∫(*p*,*q*) a cărei lege o cunosc. Cum va genera ea toate propozițiile din SL_2? Mă aștept ca printre p_x, p_y, p_z, p_u, etc. să regăsesc propozițiile *p*, *q*, $\bar{p}$, $\bar{q}$, contradicția, tautologia, ~∫, etc., toate ca acțiuni ale operațiunii ∫ asupra bazelor spațiului logic, și în genere $\int(p_x, p_y)$, oricare ar fi cele două propoziții din SL_2 va genera o propoziție tot din același spațiu.

Pornind de la p, q, considerate ca bază a lui SL_2, avem ∫(p,q) = $p_\int$ (dată inițial).

Inițiez șirul propozițional S_1: p, q, $p_\int$ (identic cu $\bar{p} \cdot \bar{q}$, formă pe care deocamdată nu o cunosc, fiindcă nu știu ce înseamnă nici „$\bar{p}$” nici „·”); De aceea aplic operațiunea astfel ∫(p,p) și prin definiție ∫(p,p) = $\bar{p}$ (și o numesc „negație de p”[31] cu tabelul de adevăr corespunzător); analog ∫(q,q) = $\bar{q}$;

Aplicând în continuare operațiunea pe bazele date sub forma ∫((p.p),(q,q)) o definesc prin $p{\cdot}q$ și o numesc „conjuncție de p și q, cu tabelul aferent.

Pot defini contradicția $C=p \cdot \bar{p}$ adică ∫(p, (p.p)). De asemenea, tautologia o definesc prin $T=\overline{p \cdot \bar{p}}$ adică ∫((p,(p.p),(p,(p.p)). În continuare dacă aș folosi negația multiplicativă a lui Wittgenstein, N(p,q,r) = $\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}$ unde $r = \bar{p} \cdot \bar{q}$ ar rezulta N(p,q,r) = $\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}} = C$. Șirul S_1 s-a îmbogățit cu o propoziție și arată acum de forma S_2: $p, q, \bar{p} \cdot \bar{q}, C$.

Continuând să aplic negația multiplicativă, $N(p, q, \bar{p} \cdot \bar{q}, C) = \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}} \cdot T = C$; șirul S_2 devine S_3: $p, q, \bar{p} \cdot \bar{q}, C, C$ și continuând în acest mod nu se mai obțin propoziții noi, înaintarea din șir s-a blocat.

Investigația poate continua în acest mod fără rezultate notabile. Inițiind șiruri din toate posibilitățile de combinări luate câte două de propoziții din cele 16, chiar fără să le definesc una dintr-alta ca mai sus, șirul se blochează după patru-cinci pași, ajungându-se în mod necesar la tautologie și în pasul următor la contradicție (de pildă, șirul p, q, $\bar{p} \cdot \bar{q}$, pVq, T, C apare în mod necesar după succesiunea p, q). Practic N poate fi scris în funcție de orice operațiune din $SL_{p,q}$, nu numai în funcție de negație și conjuncție. Dar de la orice bază aș porni, șirul de *noi* propoziții se blochează. Voi demonstra acest aspect într-un mod mai direct și prin studiul structurilor interne ale operațiunilor logice.

*

În acest stadiu îmi pun problema cum s-ar putea optimiza/generaliza acțiunea lui N (alias ∫) pentru un $SL_{p,q}$. Simbolul ∫ e susceptibil a fi studiat mai departe fiindcă pe baza lui se pot genera într-un mod minimal (cu un număr minim de folosiri ale operațiunilor logice) toate propozițiile din SL_2 astfel:

Plec de la baza (p,q);

1.∫(p,q), „nici p, nici „q”;

2.∫(p,p), „negație de p”;

3.∫(q,q), „negație de q”;

4.∫(∫(p,p),p), contradicție;

5.∫((∫(p,p),p), (∫(p,p),p)), tautologie;

6.∫(∫(p.q), ∫(p,p)), „afirmație de p”;

7.∫(∫(p.q), ∫(q,q)), „afirmație de q”;

8. ∫(∫(p,q), ∫(p,q)), „p sau q”;

9. ∫(∫(p,p), ∫(q,q)), „p și q”;

10. ∫(∫(p,(q,q)), ∫(p,(q,q))), „p implică q”;

---

[31] În expresia ∫(p_x, p_y), când $x=y$, se obține ∫(p_x, p_x) = $\bar{p}_x$ (inițial plecând de la p și q, se obțin ∫(p,p) = $\bar{p}$; ∫(q,q) = $\bar{q}$; și atunci ∫($\bar{p}$, $\bar{q}$) = pq.

11. ∫(∫(q,(p,p)), ∫(q,(p,p))), „q implică p”;
12. ∫(∫(p,p),q), negație de „p implică q”;
13. ∫(∫(p,(q,q)), negație de „q implică p”;
14. ∫(∫(∫(p,p),∫(q,q)), ∫(∫(p,p),∫(q,q))), „negație de p sau negație de q”;
15. ∫(∫(∫(p,p),q), ∫(∫(q,q),p)), „p echivalent cu q”;
16. ∫(∫(p,q), ∫(∫(p,p), ∫(q,q))), „sau p sau q”.

În contextul discuției despre modul de acțiune a operațiunii ∫ asupra structurii interne a propozițiilor, caut să exprim formal expresiile lui p şi q în funcţie de ∫ (lucru care se poate face în mai multe moduri, prin „scufundarea” bazelor în ele însele) ca apoi să găsesc expresia tuturor celorlalte operaţiuni ca funcţii de adevăr de p şi q (privite acum ca propoziţii elementare), pentru a cerceta cum acţionează simbolul ∫ asupra propoziţiilor privite ca funcţii de propoziţii elementare. Prin reintrarea lui p şi q din nou în rolul propoziţiilor elementare, caut să constat dacă acțiunea simbolului ∫ se poate exprima sub forme iterabile de tipul ∫(∫(∫(p,q)).....). Având în vedere că p, q se regăsesc și printre funcțiile propoziționale din $SL_{p,q}$, se poate admite că p=p(p,q), q=q(p,q) și atunci obțin o „generalizare” de forma ∫(p,q) = ∫(p(p,q), q(p,q)).

1) O primă variantă ar fi să schimb baza p, q cu expresiile tautologice p=∫(∫(p.q), ∫(p,p)); q=∫(∫(p.q), ∫(q,q)); obțin ∫(p,q) = ∫(∫(∫(p.q), ∫(p,p)), ∫(∫(p.q), ∫(q,q))) și care nu se mai poate transforma eficient continuând în aceeași manieră.

2) Un alt mod de a dezvolta acțiunea lui ∫ este să exprim negația ca operațiune depinzând de bazele p, q: $\bar{p}$ = ∫(p,p) = ∫((∫(∫(p.q), ∫(p,p))),(∫(∫(p.q), ∫(p,p))));

$\bar{q}$ = ∫(q,q) = ∫((∫(∫(p.q), ∫(q,q))),(∫(∫(p.q), ∫(q,q)))); și atunci ∫(p.q) = $\bar{p} \cdot \bar{q}$ = ∫(∫($\bar{p}, \bar{p}$), ∫($\bar{q}, \bar{q}$)) = ∫(∫((∫((∫(∫(p.q), ∫(p,p))), (∫(∫(p.q), ∫(p,p))))), (∫((∫(∫(p.q), ∫(p,p))), (∫(∫(p.q), ∫(p,p)))))), ∫((∫((∫(∫(p.q), ∫(q,q))), (∫(∫(p.q), ∫(q,q))))),(∫((∫(∫(p.q), ∫(q,q))),(∫(∫(p.q), ∫(q,q))))))); nici în aceste situații, formele liniare nu se grupează satisfăcător.

3) Dacă exprim p = p· $\bar{q}$ V p·q; unde p· $\bar{q}$ = ∫(∫(p,p), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))); p·q = ∫(∫(p,p), ∫(q,q)) și ţin cont că pVq = ∫(∫(p,q), ∫(p,q)), atunci p = ∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))), ∫(∫(p,q), ∫(p,q))), ∫(∫(∫(p,p), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))), ∫(∫(p,q), ∫(p,q)))); asemănător, q = $\bar{p}$ ·qVp·q; cu $\bar{p}$ ·q = ∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(q,q)); deci q = ∫(∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(q,q)), ∫(∫(p,p), ∫(q,q))), ∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(q,q)), ∫(∫(p,p), ∫(q,q))));

Calculând operațiunea ∫ în funcţie de expresiile obţinute, avem:

∫(p,q) = $\bar{p} \cdot \bar{q}$ = ∫(∫($\bar{p}, \bar{p}$), ∫($\bar{q}, \bar{q}$)) = ∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(∫(q,q),∫(q,q))) (şi înlocuind valorile lui p şi q calculate, se obţine tautologia $P = P$ de forma:

∫(p,q) = ∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(∫(q,q),∫(q,q))) = ∫(∫(∫(∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))), ∫(∫(p,q), ∫(p,q))), ∫(∫(∫(p,p), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))), ∫(∫(p,q), ∫(p,q)))), ∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))), ∫(∫(p,q), ∫(p,q))), ∫(∫(∫(p,p), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))), ∫(∫(p,q), ∫(p,q))))), ∫(∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))), ∫(∫(p,q), ∫(p,q))), ∫(∫(∫(p,p), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))), ∫(∫(p,q), ∫(p,q)))), ∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))), ∫(∫(p,q), ∫(p,q))), ∫(∫(∫(p,p), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))), ∫(∫(p,q), ∫(p,q)))))), ∫(∫(∫(∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(q,q)), ∫(∫(p,p), ∫(q,q))), ∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(q,q)), ∫(∫(p,p), ∫(q,q)))), ∫(∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(q,q)), ∫(∫(p,p), ∫(q,q))), ∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(q,q)), ∫(∫(p,p), ∫(q,q))))), ∫(∫(∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(q,q)), ∫(∫(p,p), ∫(q,q))), ∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(q,q)), ∫(∫(p,p), ∫(q,q)))), ∫(∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(q,q)), ∫(∫(p,p), ∫(q,q))), ∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(q,q)), ∫(∫(p,p), ∫(q,q))))))) (cu 159 de paranteze şi folosiri ale simbolului ∫).

4) Generez altfel ∫(p,q): Wittgenstein discută despre „operaţiunea *N*”, privită ca negaţie multiplicativă a unui şir de propoziţii, ceea ce nu este decât o extindere a operațiunii ∫. Dar negaţia este privită îndeobşte ca o operațiune unară. Exprim ca mai sus $\bar{p}$, $\bar{q}$ în funcţie de propoziţiile elementare *p* şi *q* şi apoi conjuncţia lor (asemănător procesului de generare a formelor normale din logica propoziţiilor):

$\bar{p} = \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q} = \bar{p} \cdot (q \vee \bar{q})$; în formula lui $\bar{p} \cdot q$ = ∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(q,q)), substitui pe *q* cu

∫[∫(∫(q,q), $\bar{q}$), ∫(∫(q,q), $\bar{q}$)] = ∫[∫(∫(q,q), ∫(q,q)), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))] şi rezultă:

$\bar{p}$ = ∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(∫(∫(∫(q,q), ∫(q,q)), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))], ∫[∫(∫(q,q), ∫(q,q)), ∫(∫(q,q), ∫(q,q)))));

$\bar{q} = \bar{p} \cdot \bar{q} \vee p \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot (p \vee \bar{p})$ şi prin analogie cu formula de mai sus

$\bar{q}$ = ∫(∫(∫(q,q), ∫(q,q)), ∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(∫(p,p), ∫(p,p))], ∫[∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(∫(p,p), ∫(p,p)))));

Deci se obţine tautologia:

∫(p,q) = $\bar{p} \cdot \bar{q}$ = ∫(∫($\bar{p}, \bar{p}$), ∫($\bar{q}, \bar{q}$)) = ∫(∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(∫(∫(∫(q,q), ∫(q,q)), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))), ∫(∫(∫(q,q), ∫(q,q)), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))))), ∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(∫(∫(∫(q,q), ∫(q,q)), ∫(∫(q,q), ∫(q,q))), ∫(∫(∫(q,q), ∫(q,q)), ∫(∫(q,q), ∫(q,q)))))), ∫(∫(∫(∫(q,q), ∫(q,q)), ∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(∫(p,p), ∫(p,p))), ∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(∫(p,p), ∫(p,p))))), ∫(∫(∫(q,q), ∫(q,q)), ∫(∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(∫(p,p), ∫(p,p))), ∫(∫(∫(p,p), ∫(p,p)), ∫(∫(p,p), ∫(p,p))))))) cu 79 de paranteze şi de folosiri ale simbolului ∫.

Formele lui *p* şi *q* pot angrena în toate celelalte operaţiuni posibile și astfel de forme cu aparență iluzorie se pot multiplica indefinit. Înaintarea în asemenea şiruri nu se face liniar şi nu se poate stabili formal un termen general, un *nucleu* din care să rezulte toate celelalte, doar prin simpla sa adiție. În niciunul din cazuri (unde se epuizează toate modurile de generare a operațiunii respective) nu se produce o agregare internă în maniera celei vizate de Wittgenstein pentru ca *N* să poată genera liniar noi propoziții. Expresiile obținute pentru ∫(p,q) nu converg la *nuclee* de forma ∫(∫(∫(∫((p_i, p_j), p_k), p_s), ... p_t), (unde p_i, p_j, p_k, p_s, p_t sunt orice elemente ale perechii (p, q)), astfel încât formele să difere prin *lungime* sau *număr* de folosiri ale lui ∫ și nici la *simetrii* de forma ∫(~∫(~∫(~∫(.....(~∫(p_i, p_j),p_k), p_s), ... p_t), (cu ~∫=∫(∫, ∫)).

Concluzia e că propozițiile logicii nu pot fi obținute prin particularizarea acțiunii unei forme generale. Negația multiplicativă nu este o baghetă magică prin care, la simpla „atingere”, bazele unui SL să se transforme în orice propoziție dorită; aceasta se poate face doar într-un mod particular de acțiune și nu ține de o manieră generală de calcul. Dar există vreo altă operațiune de acest gen? Se va arăta în continuare că nu, prin studierea structurilor interne ale operațiunilor logice care, compuse în mod repetat cu ele însele nu conduc la noi forme logice.

IPOSTAZE ALE GENERALITĂȚII

Wittgenstein surprinde forma generalităţii în diverse ipostaze: se constată cu uşurinţă analogia formală între (*a*, *x*, *O'x*) şi [$\bar{p}$, $\bar{\xi}, N(\bar{\xi})$] (forma generală a propoziției – (v.6)). Dacă în (5.2522) (*a*, *x*, *O'x*) (termenul general al unui şir de forme) substitui pe „*a*” cu propoziţiile elementare date, $\bar{p}$, variabila „*x*” cu $\bar{\xi}$, ansamblul propoziţiilor şi pe *O*' cu operaţia *N*, se obţine practic forma generală a propoziţiei. Formula de la (6) leagă forma generală a propoziţiei de forma generală a unui şir de forme, fiind vorba de acelaşi simbolism.

Forma generală a şirului este iarăşi complet analogă cu cele de mai sus, fiind $[x,\ \xi,\ \Omega'\xi]$, unde x reprezintă aici propoziţiile elementare date, ξ variabila propoziţională rezultată în urma aplicării operaţiunii Ω', căreia îi corespunde şirul $[\Omega^{0'}x, \Omega^{\nu'}x, \Omega^{\nu+1'}x]$ (6.02).

Având toate acestea, se ajunge la definirea (intuitivă) a numărului natural ca fiind exponentul (sau indicele[32]) unei operaţiuni logice.

În *Principia Mathematica* (PM) se defineşte numărul cardinal 1, ca fiind „clasa tuturor claselor unitare"[33]. Pentru definiţia numărului e nevoie de teoria mulţimilor completată cu teoria tipurilor, spre a se evita paradoxurile semantice. Astfel, se defineşte „numărul cardinal al unei mulţimi M", ca fiind totalitatea mulţimilor echivalente cu M.

Pentru a stabili ce înseamnă ca două mulţimi să aibă acelaşi număr de elemente, se pun în joc concepte de teoria predicatelor şi teoria mulţimilor pe care Wittgenstein le dezaprobă. Nu intenţionez aici să prezint comparativ TLP cu PM; cert este că Wittgenstein se inspiră din PM, ca şi din *Fundamentele aritmeticii* ale lui Frege[34]; notaţiile afirmaţiilor TLP calchiază pe cele din PM, de asemenea, e preluată terminologia, modul de abordare logicist, ideile de bază; apar şi deosebiri şi critici care le diferenţiază: întrebarea este: reuşeşte filosoful austriac să simplifice PM?

Wittgenstein contestă ierarhiile de forme (5.556), faptul că ar exista „relaţii simple între diferite numere ale lucrurilor (individuals)" (5.543, 5.553, 5.554, 5.5541, 5.542) cum spune Russell, şi la 5.474 Wittgenstein, care leagă logica de experienţă, adică de funcţionarea, aplicarea ei, spune că „numărul operaţiilor fundamentale necesare depinde *numai* de notaţia noastră", ceea ce ţine de o „multiplicitate matematică determinată" (5.475), de „expresia unei reguli" (5.476) şi nu de *„un număr de noţiuni fundamentale* care trebuie semnificate" (5.476). De asemenea respinge teoria tipurilor (3.331, 3.332, 3.333, 3.334) axioma reductibilităţii care o completează (6.123, 6.1232, 6.1233), axioma infinitului e considerată o pseudopropoziţie (5.535); Wittgenstein se exprimă împotriva formalismului din PM, a simbolisticii, a felului în care e folosită teoria predicatelor (5.5351, 5.5352), este împotriva felului în care defineşte Russell egalitatea, identitatea (5.5302, 5.5303). De asemenea, respinge aşa-numita „teorie multiplă a judecăţii" (5.5422)[35], se încrede în puterea logicii de a se comporta *a priori*, de a fi criteriul simplităţii, de a admite forme total generalizate („deci fără a corela în

[32] Wittgenstein definește numărul ca exponent și nu indice al operațiunii pentru a nu se confunda cu argumentul unei operațiuni, adică a nu se face un transfer nejustificat de semnificație între operațiuni și propoziții logice. lucru anticipat la 5.02. În sistemul de notații folosit, acest pericol nu există (a se vedea și Al. Surdu, notele 122, 123 , TLP, 1991, p. 138).

[33] Whitehead, A.N. şi Russell, B., *Principia Mathematica,* (1), Cambridge University Press, ediția a doua, 1968, pp. 363 sqq.

[34] Frege, Gottlob, *Fundamentele aritmeticii, O cercetare logico-matematică asupra conceptului de număr*, traducere din limba germană, cuvânt înainte, note şi tabel cronologic de Sorin Vieru, Ed. Humanitas, Bucureşti, 2000.

[35] A se vedea Alexandru Surdu, nota 146 în TLP 1991, p. 140.

prealabil un nume unui obiect determinat" – 5.526) dar se şi răzgândeşte, când descoperă în acest proces de generalizare bariere, limite, graniţe, sau când nu se hotărăşte dacă e corect să se aloce nume numerelor, ori dacă definiţiile logiciste spun *ceva*.

„Valabilitatea generală a logicii" de tip esenţial, nu accidental (6.1232) faptul că expresiile ei nu depind de propoziţii factuale, este cheia pentru concepţia despre numărul natural. Acest tip de generalitate e în afara experienţei (6.1222) unde „propoziţiile se recunosc doar din simbolurile lor că sunt adevărate" (6.113). „Adevărurile logice" se postulează, susţine Wittgenstein, în măsura în care pot postula „notaţii (un simbolism şi un formalism) adecvate" (6.1223). Aceste legi de tip esenţial nu mai pot fi supuse ele însele legilor logicii (ocazie cu care este dezavuată din nou teoria tipurilor din PM) (6.123). Ceea ce arată că „în logică nu noi exprimăm cu ajutorul semnelor ceea ce vrem, ci în logică se enunţă însăşi natura semnelor natural necesare. Dacă cunoaştem sintaxa logică a unui limbaj oarecare de semne, atunci dispunem implicit de toate propoziţiile logicii." (6.124).

Nu că o propoziţie este valabilă în toate situaţiile concrete e semnul distinctiv al propoziţiei logice (fiindcă lucrul acesta se poate întâmpla şi prin accident – de pildă, faptul că „Toţi oamenii sunt muritori" – v. 6.1231, 6.1232), şi nici tautologia nu este o marcă a propoziţiei logice generalizate (căci pot fi şi propoziţii negeneralizate care să producă tautologii) (6.1231); ci independent de sens şi numai după simboluri, sau numai folosind „regula semnelor" (6.126) putem calcula valoarea de adevăr a unei propoziţii. Doar după forma logică ne putem da seama că o propoziţie este tautologie sau nu. De altfel, am putea forţa, spunând că doar demonstraţia în logică este accidentală, fiindcă „e numai un mijloc mecanic pentru recunoaşterea mai uşoară a tautologiilor în cazuri complicate" (6.1262). O distincţie care facilitează înţelegerea poziţiei logicii este cea între „demonstraţia logică a unei propoziţii cu sens şi demonstraţia *în* logică" (6.1263): o propoziţie cu sens „exprimă ceva, iar demonstraţia ei arată că ea este aşa" pe când „în logică fiecare propoziţie este forma unei demonstraţii" (6.1264). Practic nu contează sensul propoziţiei, ci doar „forma" ei, forma logică a demonstraţiei. Deducţiile sunt implicite, susţine Wittgenstein, „orice propoziţie a logicii este un *modus ponens* reprezentat în semne" (6.1264) şi nu e nevoie ca el să fie exprimat în altă propoziţie. Toate deducţiile posibile alcătuiesc un corp de propoziţii logice adevărate care ar putea fi descrise „cu anticipaţie" (6.125). Ele ar fi „de ordin egal", „nu există legi fundamentale esenţiale şi propoziţii derivate" (6.127), Spaţiul Logic al deducţiilor este dat deodată, *a priori*, „fiecare tautologie arată ea însăşi că este o tautologie" (idem). Generalitatea logicii rezidă în reprezentaţionismul ei. Tautologiile arată prin forma lor logică (unde calculul nu e neapărat necesar) că sunt adevărate în orice situaţie (Sachlage). „Logica este o imagine oglindită a lumii" (6.13) un spaţiu în care *orice* lucru se poate oglindi, dar în care niciun lucru nu poate intra, precum Alice în *Ţara Minunilor*. Logica rămâne ca graniţă a lumii, în care lumea se oglindeşte. Această detaşare a logicii nu este una aleatorie, ci „osatura lumii" se reflectă logic (6.124). În logică nu sunt fapte, ci fapte oglindite, singura faptă a logicii este că ea se reprezentaţionează pe sine ca fapt al lumii.

«Propoziţiile logicii descriu osatura lumii, sau, mai degrabă, o reprezintă. Ele nu „tratează" despre nimic. Ele presupun că numele au semnificaţie şi propoziţiile elementare au sens şi îm aceasta constă legătura lor cu lumea. În mod evident faptul că anumite combinaţii de simboluri – care au esenţialmente un rol determinat – sunt tautologii, trebuie măcar să ne indice ceva despre lume. În aceasta constă faptul decisiv...» (6.124)

NUMĂRUL NATURAL ÎN TLP

Propoziţia 6.02 în care se introduc numerele este un exemplu de reprezentaţionism tipic TLP. Mai întâi se definesc:

x = $\Omega^{0'}x$ Def. (prin definiţie, bazele de adevăr, punctul de plecare, sistemul de propoziţii elementare sunt propriile funcţii de adevăr, (5)) şi $\Omega'\Omega^{\nu'}$x = $\Omega^{\nu+1'}$x Def. (se aplică succesiv o operaţie *Ω'* asupra propriilor ei rezultate (5.2521) *Ω'*(*Ω'*(*Ω'*...)...), deoarece operaţia poate deveni propriul ei argument (5.25)).

Pe baza acestor definiţii („reguli de semne") şirul de forme logice *x*, *Ω'x*, *Ω'Ω'x*, *Ω'Ω'Ω'x*, ..., se poate scrie, respectiv $\Omega^{0'}x$, $\Omega^{0+1'}x$, $\Omega^{0+1+1'}x$, $\Omega^{0+1+1+1'}x$, ... şi precum într-un şir sau o raţie se stabileşte relaţia de recurenţă între termenul *k* şi *k+1,* aici termenul general al şirului formal se dă prin tripletul *x* – propoziţiile elementare de la care se pleacă, *ξ* – termenul de rang *ν*, şi *Ω'ξ* – termenul de rang *ν* + 1.

Termenul general al şirului va fi [$\Omega^{0'}x$, $\Omega^{\nu'}x$, $\Omega^{\nu+1'}x$]; numerele se definesc convenţional, astfel ele apar la exponentul operaţiunii logice:

„0+1 = 1 Def.
0+1+1 = 2 Def.
0+1+1+1 = 3 Def. șamd" (6.02).

Felul în care Wittgenstein defineşte numărul natural la subpropoziţiile 6.02, 6.021. 6.022, 6.03 va face obiectul multor discuţii şi interpretări: de la Russell, Max Black, Anscombe, la Marion[36], Frascolla, Floyd[37] şi alţi specialişti din ziua de azi, nu există un punct de vedere unitar. Wittgenstein însuşi va părăsi ulterior metoda logicistă a TLP şi însuşindu-şi parcă criticile lui Russell, va căuta să surprindă conceptul de număr în genere, mergând pe cu totul alte intuiţii.

Ceea ce doresc să arăt în continuare, punând faţă în faţă şi unele dintre criticile sau interpretările aduse formalismului numărului natural din TLP, este să întăresc rezultatele de până acum că numărul natural nu se poate defini pe seama operaţiunii logice; pentru aceasta urmează să autoaplic o operaţiune propriilor ei baze spre a-i studia structura ei internă. Dacă la modul superficial, „epidermic" formalismul wittgensteinian sugerează un traseu posibil al înaintării într-un şir de forme logice, voi arăta că acest lucru nu se poate face ca „import" al generalităţii

[36] Marion, Mathieu, *Wittgenstein, Finitism and The Foundations of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[37] Floyd, Juliet, „Number and Ascription of Number in Wittgenstein's Tractatus", în Perspectives on Early Analytic Philosophy: Frege, Russell, Wittgenstein, ed. E.Reck, New York, Oxford University Press, 2002, pp. 308–352 și „Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics" în The Oxford Handbook of Philosophy of Logic and Mathematics, ed. S. Shapiro, Oxford University Press, 2005, pp. 75–128.

operaţiunilor logice. Singurul mod în care s-ar putea dezvolta sistemul de operaţiuni este prin compunerea lor sub formă de tabele şi sugerat cumva dar nu și dezvoltat de Wittgenstein, aspect de care mă voi ocupa într-un articol ulterior.

Max Black[38] explică modul în care introduce Wittgenstein numerele naturale în legătură cu operaţiunea *Ω'x*; exegetul oferă o analogie pentru a înţelege intuiţia lui Wittgenstein, dând un exemplu cumsecade: să presupunem că operaţiunea (predicatul) avută în vedere este „mama lui *x*": „Considerând seria de expresii: mama lui *x*, mama mamei lui *x*, mama mamei mamei lui *x*, mai pe scurt: $P'x$, $P'P'x$, $P'P'P'x$,..... se scrie astfel: $P^{1'}x$, $P^{1+1'}x$, $P^{1+1+1'}x$ ....., şi, în final ca $P^{1'}x$, $P^{2'}x$, $P^{3'}x$, ...,"[39].

Secretul acestui tip de „alchimie", cum o va numi mai târziu Wittgenstein, rezidă în utilizarea adecvată a unor simboluri: „1", „1+1", „1+1+1", etc. care marchează cum apare expresia „mamă", „mama mamei", „mama mamei mamei" etc., iar simbolurile „2", „3", sunt abrevieri ale simbolurilor „1+1", „1+1+1".

Cu toată simplificarea adusă, Black consideră că acest exemplu păstrează în esenţă ideea de obţinere a numărului natural la Wittgenstein. Dar ceea ce se pune în discuţie în definirea numărului este profitul de pe urma generalităţii esenţiale de tip logic care se transferă în matematică (6.031, 6.11, 6.111, 6.1232). Iată comentariul lui Black faţă de 6.02:

„Dacă *x* stă pentru o singură propoziţie, *Ω'x* ar trebui să stea pentru orice funcţie de adevăr aplicată lui *x* singur, deci şi pentru *x* sau *∼x*. Dar atunci *Ω'Ω'x* înseamnă acelaşi lucru cu *Ω'x*. Acelaşi rezultat se menţine dacă *x* este destinat să stea pentru o mulţime de propoziţii. Autoaplicarea operaţiei *Ω* trebuie să conducă la aceeaşi operaţiune, (a se vedea 6.01) aşa cum ne arată în mod evident 6.01. Se pare că pentru pentru orice *m* şi *n* mai mari ca zero, trebuie să avem $\Omega^{m'}x = \Omega^{n'}x$. Oare să rezulte de aici că *m* = *n* pentru orice pozitiv întreg?"[40]

Adică, dacă *x* este o tautologie, orice aplicare a operaţiunii respective, tautologice, duce la acelaşi rezultat, deci se poate întâmpla ca $\Omega^{m'}x = \Omega^{n'}x$.

Împotriva criticii lui Black s-ar putea spune: nu contează rezultatul operaţiunii, ci de câte ori se aplică, „numărul" ei de aplicări, felul în care ea acţionează şi modifică structura internă a propoziţiilor pe care le are drept argument. Dar aşa cum voi arăta imediat, intuiţia lui Black e corectă: impasul există, nicio operaţiune nu e în măsură să genereze un şir infinit de forme şi astfel să devină bază a formalismului numărului natural, aşa cum a crezut Wittgenstein.

Un alt aspect pe care Wittgenstein îl enunță, dar fără să reuşească să îl învedereze, este legătura dintre principiul de bază al propoziţiilor logicii, care este generalitatea și posibilitatea exprimării numărului natural pe baza operaţiunilor logice. De asemenea, exprimarea numărului natural are legătură cu faptul că „numărul legilor logice fundamentale este arbitrar" (6.1271), astfel dacă compunerea succesivă a operaţiunilor conduce la tautologie sau dacă fiecare astfel de lege este exprimabilă prin aplicarea succesivă a unei operaţiuni oarecare, atunci putem conchide că numărul este un exponent al unui şir de operaţiuni logice.

---

[38] Black, Max, *A Companion to Wittgenstein'sTractatus Logico-Philosophicus*, Ithaca, Cornell University Press, 1964, pp. 313–317.

[39] *Ibidem*, p. 313.

[40] *Ibidem*, p. 314.

Dar acest lucru e numai un deziderat, fiindcă în fapt nici operaţiunea nu e generală, esenţială, ci relativă, nici aplicarea ei repetată nu conduce la înaintarea liniară într-un şir formal. Forma logică pe care o propune Wittgenstein pentru operaţiune nu e generală, atâta timp cât în expresia ei apare o funcţie particulară, $N(\bar{\xi})$. Dacă forma generală a propoziţiei este tributară ca structură unui operator particular, atunci unde mai e generalitatea? Faptul că pe baza formei sale se pot obţine toate celelalte operaţiuni logice, înseamnă că are un statut privilegiat, dar de care nu se poate profita în felul scontat de Wittgenstein. Modul său de acţiune nu e unul liniar[41] ideal, aşa cum a reieşit din calculele anterioare.

Impasul în care consider că ne aflăm aici este că ceea ce încearcă să obţină Wittgenstein nu e valabil în cazul propoziţiilor (funcţiilor) de adevăr dintr-un SL, dar ar putea fi valabil în cazul unor propoziţii din cadrul limbajului natural (prelucrate în termeni de logica predicatelor) – de exemplu: cum s-a arătat mai sus, „orice om are o mamă”, sau „între orice două puncte de pe o dreaptă se mai află un punct”, sau „orice segment conţine un mijloc” etc.; evident că există situaţii în limbajul natural în care nu se mai poate înainta în şirul de forme; considerând de pildă „orice câine are un stăpân”, ca punct de plecare al formei „pentru orice x, există un y”, şamd, se va obține „orice stăpân are un stăpân” etc. Nu interesează conţinutul propoziţiilor, ci forma lor logică pe baza căreia s-ar putea generaliza. În plus, orice generalizare sau regresie bazată pe limbaj natural se opreşte undeva într-un punct temporal (ca semnificație). Dar dacă generalitatea nu se mai poate confrunta în niciun fel cu realitatea, înseamnă că ea nu mai este o imagine a lumii, în contradicţie cu filosofia propoziţiilor din TLP. Şi dacă ajung la un formalism valabil pe baza unei generalităţi iluzorii, înseamnă că intuiţia de tip reprezentaţionist nu a funcţionat într-un mod corect.

EŞECUL ÎNAINTĂRII ÎNTR-UN ŞIR DE FORME PE BAZA RELAȚIILOR INTERNE ALE STRUCTURILOR PROPOZIȚIONALE (OPERAȚIONALE)

În continuare doresc să arăt că modul liniar de a înainta într-un şir de forme pe care Wittgenstein îl exprimă formal prin x, Ω'x, Ω'Ω'x, Ω'Ω'Ω'x, ..., sau $\Omega^{0'}x$, $\Omega^{0+1'}x$, $\Omega^{0+1+1'}x$, $\Omega^{0+1+1+1'}x$, ... pe scurt [$\Omega^{0'}x$, $\Omega^{\nu'}x$, $\Omega^{\nu+1'}x$], nu duce nicăieri, încercarea de a transfera generalitatea (iluzorie) a operaţiunii la forma numărului natural, ca exponent al operaţiunii, conduce obligatoriu la un eşec.

Practic voi arăta că în cazul unui $SL_{p,q}$ înaintarea şirului de forme se opreşte după câţiva paşi.

Fie tabelul lui Wittgenstein:

p	q	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	O_9	O_{10}	O_{11}	O_{12}	O_{13}	O_{14}	O_{15}	O_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

[41] Liniar, adică operațiune *lângă* operațiune, operațiune compusă cu sine, sugerând aditivitatea numerelor naturale.

Procesul de aplicare succesivă a operaţiunii se bazează pe conservarea structurii interne a propoziţiei ca funcţie de adevăr de propoziţii elementare şi compunerea de operaţiuni diferite se face pe baza păstrării acestei structuri. Să studiem ce se întâmplă prin aplicarea succesivă a unei operaţiuni la ea însăşi. Voi folosi tabele de tipul:

p	q	O_i	O_iO_i	$O_iO_iO_i$ ...

Indicele i al operațiunii nu reprezintă un număr, ci indicativul unei anumite operațiuni din $SL_{p,q}$.

Pentru O_1, prima operaţiune transformă (p, q) în contradicţie şi compusă cu ea însăşi conduce la contradicţie: Deci $O_1O_1....O_1$ = ${O_1}^n$ = O_1 (de unde, n=1, oricare ar fi n, absurd).

Acelaşi lucru se întâmplă şi în cazul tautologiei, O_{16}; (i=16).

Pentru. O_2, ${O_2}^n$ = ${O_2}^{n-1}$ = O_2, deci n = n-1 = ... = 1, absurd.

p	q	O_2	$O_2 \cdot O_2$	${O_2}^n$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Pentru O_3 se constată că ${O_3}^3$ = $O_3({O_3}^2)$ = O_3; ${O_3}^4$= ${O_3}^2$; înaintarea n șirul de forme se blochează, șirul nu e convergent: Pentru n = 2k+1, ${O_3}^{2k+1}$ = O_3 și pentru n = 2k, ${O_3}^{2k}$ = ${O_3}^4$ = ${O_3}^2$. Fără să invoc „injectivitatea” operațiunii, rezultă că numerele pare ar fi egale între ele și numerele impare ar fi egale între ele; O_3 nu poate juca vreun rol în definirea numărului natural.

p	q	O_3	$O_3 \cdot O_3$	${O_3}^3$	${O_3}^4$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0

Pentru i=4, ${O_4}^n$= ${O_4}^{n-1}$ = ... = O_4, deci n = n-1 = ... = 1, absurd.

p	q	O_4	$O_4 \cdot O_4$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Pentru i=5, $O_5{}^2 = O_5{}^3 = O_5{}^{n-1} = O_5{}^n$, deci n = n-1 = ... = 2, absurd.

p	q	O_5	$O_5{}^2$	$O_5{}^3$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0

Pentru i=6, $O_6{}^n = O_6{}^{n-1}$ = ... = O_6, deci n = n-1 = ... = 1, absurd.

p	q	O_6	$O_6{}^2$	$O_6{}^3$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Pentru i=7, dacă n = 2k+1, $O_7{}^{2k+1}$ = ... = O_7 și dacă n = 2k, $O_7{}^{2k} = O_7{}^4 = O_7{}^2$. Operațiunea nu poate reprezenta o bază pentru definirea numărului natural.

p	q	O_7	$O_7{}^2$	$O_7{}^3$	$O_7{}^4$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0

Pentru i = 8, $O_8{}^n = O_8{}^{n-1}$ = ... = O_8, deci n = n-1= ... = 1, absurd.

p	q	O_8	$O_8{}^2$	$O_8{}^3$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Pentru i = 9, $O_9 = O_9{}^3$ = ... = $O_9{}^{2k+1}$ şi $O_9{}^2 = O_9{}^4 = O_9{}^{2k}$, deci 1= 3 =.... 2k+1 şi 2 = 4 = 6...= 2k, absurd.

p	q	O_9	$O_9{}^2$	$O_9{}^3$	$O_9{}^4$	$O_9{}^5$
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0

Celelalte operațiuni din $SL_{p,q}$ se comportă la fel, având în vedere că $O_k = \bar{O}_{17-k}$, (∀) k = $\overline{1,16}$. În concluzie, niciuna dintre operațiunile dintr-un SL nu poate constitui o bază pentru reprezentarea numerelor naturale.

ILUSTRAREA UNUI FORMALISM FĂRĂ ACOPERIRE LOGICĂ

Pasquale Frascolla[42] consideră că înţelegerea şi interpretarea filosofiei matematicii din TLP (cu cele două grupuri de propoziţii, 6.02-6.03 şi 6.2-6.24) se află încă într-un „stadiu embrionar”. După el, două autorităţi ale exegezei, ca Black şi Anscombe fac greşeli semnificative în interpretarea FWM din TLP. Totuşi, Frascolla nu va face decât să se refere la aspectele formale exterioare ale propoziţiei şi nu la structura sa internă care, aşa cum am arătat, refuză să intre în rolul trasat de Wittgenstein.

Ca şi Anscombe,[43] Frascolla[44] consideră că numărul natural este introdus printr-o definiţie inductivă, după numărul de apariţii ale termenului „1” la exponentul unei operaţiuni într-un şir de forma $\Omega^{0'}x$, $\Omega^{0+1'}x$, $\Omega^{0+1+1'}x$, $\Omega^{0+1+1+1'}x$, ...

Ca şi Black, Frascolla dă acelaşi exemplu din limbajul curent pentru a înţelege procedura generativă a unei operaţiuni: şirul ‚Paul’, ‚tatăl lui Paul’, ‚tatăl tatălui lui Paul’ etc. „poate fi considerat ca fiind constituit din următoarele: o expresie care nu este rezultatul niciunei aplicări a operaţiunii; o expresie care este rezultatul aplicării operaţiunii pentru numele propriu „Paul”; o expresie care este rezultatul aplicării operaţiunii la descripţia definită „tatăl lui Paul”.

«Let us consider the operation that, given any dyadic predicate “R”, generates the expression “the R of **a**” when applied to an appropriate singular term “**a**”. For example, taking the dyadic predicate “father of”, the series of expressions “Paul”, “the father of Paul”, “the father of the father of Paul”, “the father of the father of the father of Paul” etc. can be considered as constituted by the following: an expression which is not the result of any application of the operation; an expression that is the result of the application of the operation to the proper noun “Paul”; an expression that is the result of the application of the operation to the definite description “the father of Paul”»[45].

E adevărat că unele precizări şi aprofundări sunt necesare în cadrul limbajului formal folosit în generarea propoziţiilor prin aplicarea operaţiunii *N* şi în definiţia numărului natural. Astfel se constată în spiritul exegezei că: variabila obiect „x” din $x = \Omega^{0'}x$ este o expresie pentru o formă care nu a fost generată de aplicarea unei operaţiuni; în ce priveşte semnul „ ’ ” (apostroful) (care apare şi în *definiendum*-ul şi în *definiens*-ul definiţiei inductive 6.02), se confirmă că e vorba de un semn inspirat din *PM*, unde „dacă R este un predicat diadic relaţional, atunci R’*x* este singurul obiect *y* având legătura R cu *x*”[46]; semnul ‚0’ arată că nu e vorba de nicio ocurenţă a lui „+1”, iar litera *v* exprimă oricare număr „*n*” de ocurenţe ale lui „+1”.

[42] Frascolla, Pasquale, *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, London: Routledge, 1994; *Understanding Wittgenstein’s Tractatus*, Routledge, 2007.

[43] Anscombe, G.E.M., *Op.Cit.*, p. 125.

[44] Frascolla, Pasquale, *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, London: Routledge, 1994, p. 1.

[45] *Ibidem*, p. 10.

[46] *Ibidem*, p. 9.

Definiţia este inductivă, în sensul că ne sunt date primul termen dintr-un şir şi modul general de trecere de la *v*(*n*) la *v*+1(*n*+1).[47]

Inovaţia apare la Frascolla când înlocuieşte simbolul „+1” cu alt simbol, „*S*”; deoarece adunarea şi înmulţirea dintre numerele naturale se vor defini ulterior, pe baza limbajului teoriei operaţiunilor logice. (Wittgenstein nu mai tratează explicit adunarea, ci doar operaţia de înmulţire, la 6.241, în cazul particular, „2x2 = 4”).

Şirul formal obţinut de exegetul italian va fi $\Omega^{0'}x = x$; $\Omega^{S0'}x = \Omega'x$; $\Omega^{SS0'}x = \Omega'\Omega'$x; $\Omega^{SSS0'}x = \Omega'\Omega'\Omega'x$; ... şi definiţia de la 6.02 se referă la numărul de apariţii ale lui *S* la exponentul operaţiunii. Astfel (dacă aplicarea indefinită a operaţiunii ar avea sens!), seria *x*, *Ω'x*, *Ω'Ω'x*, *Ω'Ω'Ω'x*,..., ar putea fi caracterizată în următorul mod: „'*x*' arată forma oricărei expresii care este o expresie iniţială a unei serii generată de aplicarea succesivă a unei operaţiuni (şi anume, o expresie care nu a fost generată de nicio aplicare a operaţiunii), ‚*Ω'x*' arată forma oricărei expresii care este rezultatul aplicării succesive a unei operaţiuni, constând dintr-o singură aplicare a operaţiunii pornind de la o expresie iniţială; ‚*Ω'Ω'x*' arată forma oricărei expresii care este rezultatul aplicării succesive a unei operaţiuni, constituite din aplicarea operaţiunii la rezultatul propriei sale aplicări la o expresie iniţială; şi aşa mai departe.”[48] Ceea ce apare la exponentul operaţiunii arată de câte ori – numărul – se aplică operaţiunea: în şirul de expresii *0*, *S0*, *SS0*, *SSS0*.... fiecare termen exprimă „proprietatea formală a tuturor expresiilor generate de acelaşi număr de aplicări a unei operaţiuni la rezultatul propriei aplicări”[49] şi faptul că „numărul este exponentul unei operaţiuni” (6.021) „susţine reductibilitatea sensului oricărui numeral ‚*n*', la sensul lui ‚*n*', în numărul său de apariţii la exponentul lui ‚*Ω*'”[50]. Forma generală a numărului întreg [0, ξ, ξ+1] arată primul termen al seriei şi forma procedurii de generare a succesorului oricărui termen (6.03).

Pe ce se bazează tot acest demers? Pe faptul că aplicarea succesivă a operaţiunii la propriile baze conduce la un rezultat, că simbolul ‚*Ω'Ω'x*' are acoperire logică. Or, cum faptul acesta nu se produce, aplicarea liniară a operaţiunii (s-a arătat că situaţia e valabilă pentru toate cele 16 operaţiuni dintr-un SL binar) nu construieşte un şir de forme. Şi atunci „definiţia inductivă” pe baza căreia se fundamentează logicist mulţimea numerelor naturale este superfluă!

Pentru a ajunge la adunarea şi înmulţirea dintre numerele naturale, consider că Frascolla pune faţă în faţă numărul natural ca termen aritmetic (proaspăt definit logicist!) şi rolul jucat ca element în reprezentaţionismul propriu al compunerii succesive a operaţiunilor logice. Iar dacă ‚r' şi ‚s' sunt astfel de termeni, atunci şi ‚r+s' şi ‚r×s' sunt la fel. Structura unui ‚2+3' sau ‚2×3' ne arată cum stau lucrurile în cazul general, prin apel la construcţia unor configuraţii de operaţiuni: „Thus, for instance, the configuration “(*Ω'Ω*)'(*Ω'Ω*)'(*Ω'Ω*)'*x*” will correspond, in the sense

[47] Dar ce reprezintă „inducţia” ca metodă a matematicii pentru Wittgenstein? În TLP legea inducţiei nu acumulează gradul de generalitate necesar pentru a fi o propoziţie logică, *a priori*, ci e abia una „cu sens”: „aşa-numita lege a inducţiei nu poate fi în niciun caz o lege logică, căci ea este în mod evident o propoziţie cu sens. – Şi de aceea ea nu poate fi o lege *a priori*” (6.31).

[48] *Ibidem*, p. 10.

[49] *Ibidem*, p. 12.

[50] *Ibidem*.

explained above, to the complex arithmetical term "(2×3)", and the configuration "((*Ω*'*Ω*)'(*Ω*'(*Ω*'*Ω*)))'*x*" will correspond to the complex arithmetical term "(2+3)"[51]. Lipsit de acoperire, tot formalismul devine un manierism pe care Wittgenstein îl eludează și chiar îl respinge laconic prin plasarea pe un alt nivel al discursului, dar poate fi preluat drept valabil de o exegeză acaparată de mirajul exigenţei imperioase de a defini numărul natural pe baza unei forme pure dar goale.

Plecând de aici şi de la exemplul dat de Wittgenstein, Frascolla va defini cât se poate de „riguros" înmulţirea şi adunarea numerelor reale, făcând iarăşi un salt „inductiv" şi adoptând – preluând de fapt în propriul formalism dezvoltat ca justificare a sugestiilor lui Wittgenstein – proprietăţi precum *asociativitatea* şi *comutativitatea* acţiunii operaţiunilor în procesul lor de compunere unele cu altele, ceea ce, după cum s-a văzut, nu se bazează pe o realitate logică.

Identităţi de tipul $(\Omega'\Omega)'\xi = \Omega'\Omega'\xi$ sau şi mai general, $(\Omega'\Psi)'\xi = \Omega'\ \Psi'\xi$ (semnificând compunerea a două operaţii arbitrare (*Ibidem*, pp. 16, 17) nu pot fi susţinute. La rezultate precum

$\Omega^{(r\times s)'}x = (\Omega^{r})^{s'}x$ sau $\Omega^{(2\times 3)'}x = \Omega^{(3x2)'}x$[52], nu se poate ajunge.

Desigur, ‚*Ω*' este asimilat operațiunii *N* (∫), fără ca eforturile celor care au încercat să vadă realmente dacă acesta e privilegiat în vreun fel, să-i atragă atenţia lui Frascolla.

De asemenea Frascolla dojeneşte nedumerirea critică a lui Black[53] cu privire la situaţia inevitabilă în care aplicând de mai multe ori operaţiunea Ω', la o anumită variabilă propoziţională x, se obţine $\Omega'x = \Omega'\Omega'x = \Omega'\Omega'\Omega'x = \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x$, şi aşa mai departe, adică $\Omega^{1'}x = \Omega^{2'}x = \Omega^{3'}x = \Omega^{4'}x$ ...., de unde rezultă că 1= 2 = 3 = 4 .... şamd[54]. Şi atunci nu se mai poate susţine definirea numărului natural pe o cale logică şi cu aceasta reducerea aritmeticii la logică!

Ce aduce Frascolla în schimb? O ilustrare a unui formalism nefundamentat care nu slujeşte unei filosofii a matematicii în spiritul TLP. Rămâne de apreciat la exegetul italian sesizarea faptului că Wittgenstein va fi în continuare interesat de conceptul de „formă logică", cel care va juca un rol important în dezvoltarea ulterioară a unui SG (spaţiu gramatical) ca un cadru în care *formele* rămân, gradul de *generalitate* rămâne, dar nu mai sunt determinate logic.

CONCLUZII

Într-o reconstrucţie a aritmeticii, calculele cu numerele naturale constau în manipularea unor semne şi configuraţii de tip reprezentaţionist (vezi simbolurile cu linii date foarte des ca exemplu în FWM) din care se pot extrage proprietăţi

[51] *Ibidem*, pp. 13, 14.

[52] *Ibidem*, p. 14 sqq.

[53] Black 1964, p. 314.

[54] Și conform definiţiilor de la 6.02, dacă $\Omega^{s'}x=\Omega^{t'}x$ atunci $s=t$, deoarece au aceeaşi definiţie (comportă acelaşi număr de apariţii ale operaţiei *Ω*: mai mult, Frascolla demonstrează că o identitate numerică t=s este o teoremă aritmetică dacă şi numai dacă corespunde ecuaţiei $\Omega^{s'}x=\Omega^{t'}x$, din limbajul teoriei generale a operaţiunilor logice (în legătură cu 6.22, Frascolla, *Ibid.*, pp. 29–30).

generale de tip filosofic. De asemenea, consider că formalismul din TLP nu e riguros, ci reprezentaţionist, expresiv, precum în majoritatea FWM.

Maniera de a critica încercările lui Frege şi Russell de a fundamenta matematica pe logică, denotă că pentru Wittgenstein logica şi matematica nu au format o unitate nici în TLP (TLP 4.1273, 5.535, 6.031, 6.1232, 6.1233) nici în filosofia târzie, când continuă să pună sub semnul întrebării teoria claselor, axioma infinitului şi reductibilităţii.

Wittgenstein a oscilat între formalism și antiformalism, dar a fost constant antifundaţionalist, a contestat puterea logicii de a soluţiona problemele filosofice. Conștient de eșecul logicist, din tot eșafodajul destinat definirii numărului natural se vor dezvolta la Wittgenstein destule teme perene în în continuitatea viziunii tractariene: din acţiunea operaţiunii care se aplică asupra propriilor baze (funcţii propoziţionale) va rămâne acţiunea şi *urmarea unei reguli*, numerele naturale vor fi privite ca entităţi care se pot *construi* matematic şi nu vor depinde de fundamente de tip logic, *inducţia* va fi în continuare contestată ca metodă matematică de generare a unor noi propoziții din altele deja existente, *formele generale* vor constitui obiect de dezbatere logico-formală, la fel ca noţiunile de *adevăr*, *demonstrabilitate*, *decidabilitate*. La Wittgenstein eșecul logicist e unul provizoriu. El marchează o etapă deja marcată a ascensiunii pe scara gândirii tractariene.

BIBLIOGRAFIE

Ludwig Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*:
– 1961, [text paralel german-englez], trad. D.F. Pears și B.F. Mc. Guiness, introducere de Bertrand Russell, London Routledge & Kegan Paul;
– 1961, [în limba franceză], urmat de *Investigations philosophiques*, traducere din limba germană de Pierre Klossowski, introducere de Betrand Russell, colecția Tel, Ed. Gallimard;
– 1969, [în limba germană], urmat de *Tagebücher 1914-1916* și *Philosophische Untersuchungen*, în „Schriften 1”, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main;
– 1990, [text paralel german-englez], trad. C.K.Ogden și F.P.Ramsey, London: Routledge, prima ediție 1922, (originalul în limba germană publicat cu titlul *Logisch-Philosophische Abhandlung*, în „Annalen der Naturphilosophische”, vol. XIV, 3/4, 1921;
– 1991, [în limba română], traducere, cuvânt introductiv și note de Alexandru Surdu, Ed. Humanitas, București;
– *Philosophical Remarks*, editor Rush Rhees, traducere în limba engleză de Raymond Hargreaves și Roger White, Basil Blackwell, Oxford 1998, [prima ediție în limba germană, 1964];
– *Philosophical Grammar*, partea întâi: *The Proposition and its Sense*; partea a doua: *On Logic and Mathematics*, editor Rush Rhees, traducere în limba engleză de Anthonny Kenny, Basil Blackwell, 1993, [prima ediție în limba germană, 1974];
– Anscombe, G.E.M., *An Introduction toWittgenstein`s Tractatus*, ediția a doua, revăzută, The Academy Library Harper & Row, Publishers, New York, 1963;
– Black, Max, *A Companion to Wittgenstein'sTractatus Logico-Philosophicus*, Ithaca, Cornell University Press, 1964;
– Church, Alonzo, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1996;

– Floyd, Juliet, „Number and Ascription of Number in Wittgenstein's Tractatus", în Perspectives on Early Analytic Philosophy: Frege, Russell, Wittgenstein, ed. E.Reck, New York, Oxford University Press, 2002
– Floyd, Juliet „Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics" în The Oxford Handbook of Philosophy of Logic and Mathematics, ed. S. Shapiro, Oxford University Press, 2005
– Frascolla, Pasquale, *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, London: Routledge, 1994; *Understanding Wittgenstein's Tractatus*, Routledge, 2007;
– Frege, Gottlob, *Sens și semnificație*, în „Logică și filosofie", culegere sub îngrijirea lui M. Tîrnoveanu și Gh. Enescu, Ed. Politică, București, 1966, pp. 54-79;
– Frege, Gottlob, *Fundamentele aritmeticii,* (*O cercetare logico-matematică asupra conceptului de număr*), traducere din limba germană, cuvânt înainte, note și tabel cronologic de Sorin Vieru, Ed. Humanitas, București, 2000;
– Marion, Mathieu, *Wittgenstein, Finitism and The Foundations of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1998;
– Nicod, Jean „A Reduction in the number of the Primitive Propositions of Logic", în *Procedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. XIX, 1916, pp. 32-41;
– Whitehead, A.N. şi Russell, B., *Principia Mathematica,* (1), Cambridge University Press, ediția a doua, 1968.