RELAŢIA DE APARTENENŢĂ ŞI UNELE INFERENŢE ASOCIATE ACESTEIA

Gabriel Iliescu

1. CE ÎNSEAMNĂ „$x \in M$”?

Expresia $x \in M$ se traduce în limba naturală aşa: *x aparţine mulţimii M*. Teoria mulţimilor începe cam cu aşa ceva. Apartenenţa pare o relaţie elementară. Relaţiile dintre mulţimi sunt reductibile la două apartenenţe. Astfel, $A \subset B$ se reduce la condiţionalul dintre două apartenenţe: $x \in A \supset y \in B$[1]. Nu numai incluziunea, dar şi celelalte *relaţii*[2] şi *operaţii*[3] sunt de asemenea reduse la apartenenţă. Produsul cartezian suportă o astfel de reducere: A × B = {x, y)| $x \in A$ & $x \in B$}[4].

Apartenenţa la nivel atomar permite construirea unei *echivalenţe de legătură* cu logica predicatelor. În genere, înțelegem mulțimea ca fiind determinată de o proprietate, fie aceasta F[5]. Aceasta este o proprietate care conturează o mulţime de obiecte, care aparţin lui F. Obiectele au proprietatea F, simbolic *F(x)*, *x are proprietatea F* sau *x este F*. Cele două enunţuri sunt echivalente: $x \in F \equiv F(x)$, x aparţine lui F ddacă x are proprietatea F[6].

Aşadar, relaţiile, operaţiile cu mulţimi, funcţiile sunt reduse la apartenenţă. Nu doar autorii citaţi aici, *nu* urmăresc să intre într-un posibil interior al apartenenţei. Este exact ceea ce ne propunem în articolul actual.

Introducem presupunerea suplimentară că *M* este o mulţime de valori *[1, ..., n]*. Ca urmare, expresia $x \in M$ devine *(1)* $x \in [1, ..., n]$, x aparţine mulţimii de valori între 1 şi n. Astfel, întrebarea devine: *ce înseamnă că* $x \in [1, ..., n]$*?* Mai exact *întrebarea* este:

Există vreo legătură între relaţia de apartenenţă, pe de o parte, şi funcţiile de adevăr şi relaţiile de ordine pe de altă parte?

---

[1] Vasile Podaru şi Veronica Cornaciu, *Logică matematică şi computaţională*, Universitatea Titu Maiorescu, Bucureşti, 2016, p. 9.

[2] Cornaciu Podaru, *op. cit.*, p. 10.

[3] *Ibidem*.

[4] *Ibidem*.

[5] Gheorghe Enescu, *Logică Simbolică*, Editura Științifică, Bucureşti, 1971, p. 135.

[6] Idem, *Tratat de Logică*, Editura Lider, Bucureşti, 1997, p. 273.

În cazul de față am menționat o ultimă valoare n a mulțimii de elemente. Urmează că mulțimea este finită[7]. Pe lângă *apartenență*, și termenul de *mulțime* este luat ca termen primitiv[8]. Ceea ce nu exclude ca pentru cel de al doilea, în limbajul obișnuit, să fie folosiți destul de mulți termeni înlocuitori[9]. Între propozițiile teoriei mulțimilor și legi din logica propozițiilor există *anumite analogii*[10]. Menționăm doar câteva exemple.

$M \equiv --M$[11]	$p \equiv \sim\sim p$[12]
$M \cap N \equiv N \cap M$[13]	$p \,\&\, q \equiv q \,\&\, p$[14]
$M \cup M \equiv M$[15]	$p \vee p \equiv p$[16]

Dubla negație este prezentă în ambele domenii. Intersecției îi corespunde conjuncția. Reuniunii îi corespunde disjuncția. Cele două domenii sunt calificate ca izomorfe[17]. Aceasta se bazează pe corespondență[18]. Cu toate acestea există unele neconcordanțe. De exemplu, tranzitivității împlicației nu îi corespunde tranzitivitatea incluziunii.

$((A \subset B) \cap (B \subset C)) \subset (A \subset C)$[19] $((p \supset q) \,\&\, (q \supset r)) \supset (p \supset r)$[20]

Formula din stânga arată că incluziunea lui A în B și incluziunea lui B în C se intersectează. Această intersecție este inclusă într-o altă incluziune. Ceea ce este lipsit de sens[21].

Dincolo de aceasta, se pot face unele remarci. Avem o corespondență între operații cu mulțimi și funcții de adevăr, chiar dacă aceasta este restricționată în cazuri precum tranzitivitatea. Operațiile cu mulțimi redau termeni. M și N sunt termeni dezvoltați prin operatorii $-$, $\cap$, $\cup$[22]. Ca urmare echivalențele redau relații între termeni. Deci, nu ar putea fi părți ale unor inferențe. Pe când *p & q* poate fi premisa concluziei *q & p*, chiar dacă inferența este atât de simplă.

---

[7] Enescu, *op. cit*, p. 137.
[8] Gheorghe Enescu, *Logică Simbolică*, Editura Științifică, București, 1971, p. 136.
[9] „turmă de oi, roi de albine… colecție de cărți", după Enescu, *op. cit.,* p. 135–136.
[10] *Ibidem*, p. 152.
[11] Formula (7), după Enescu, *op. cit.*, p. 151.
[12] Formula 15.1.16, după Cornel Popa, *Logică și Metalogică*, vol. I, Editura Fundației România de Mâine, București, 2000, p. 117.
[13] Formula (8), după Enescu, *op. cit.*, p. 151.
[14] Formula 15.1.15, după Popa, *op. cit.*, p. 117.
[15] Formula (18), după Enescu, *op. cit*.
[16] Formula 15.1.28, după Popa, *op. cit*.
[17] Enescu, *op. cit*., p. 152–153.
[18] Nota de subsol, conform cu Enescu, *op. cit.*, p. 153.
[19] *Ibidem*.
[20] *Ibidem*.
[21] *Ibidem*.
[22] *Ibidem*, p.152.

Dar situaţia apartenenţei este diferită. Se admite că, alături de $M \subset N$ și $M \equiv N$, apartenența face parte dintre afirmațiile din teoria mulțimilor, care generează raționamente[23]. De fapt, diferite operații sau relații între mulțimi sunt reductibile la apartenența unor elemente la acele mulțimi și la funcții de adevăr între aceste apartenențe.

Spre deosebire, apartenenţei nu-i corespunde vreo funcţie de adevăr. Însă poate fi reexprimată în limba naturală, păstrând ideea ei. Reexprimarea înlocuieşte cuvântul *apartenenţă* cu cuvântul *şi*. Acestuia îi corespunde funcţia de adevăr a conjuncţiei. Pe această cale apartenenţa poate fi redusă la funcţii de adevăr și devine astfel parte a unor inferențe.

2. CÂTEVA FORMULE PRIVIND APARTENENȚA

Presupunem intuitiv evident că apartenenţa din (1) poate fi redată astfel: valoarea lui x este cel puţin egală cu 1 şi, în acelaşi timp, cel mult egală cu n: (2) $1 \leq x \leq n$. O simplă observare atentă a exprimării anterioare ne arată că între cele două referiri la valorile lui x este gândit în mod natural un „şi”. Acesta coincide cu funcţia de adevăr a conjuncţiei redată prin acest cuvânt. Ceea ce permite redarea lui 2 prin: (3) $x \geq 1$ & $x \leq n$. Iar (3) se poate descompune în membrii săi distincţi: (4) $x \geq 1$ respectiv (5) $x \leq n$. Dar (4) înseamnă *x este egal cu 1 sau x este mai mare decât 1*, redată prin *(6)* $1 > x \vee x = 1$, pe când (5) înseamnă: x este mai mic sau egal cu n, simbolic *(7)* $x < n \vee x = n$. Fiecare dintre aceste expresii este mai mult sau mai puţin îndepărtată de apartenenţa (1). Până în prezent, nu avem mai mult decât o simplă colecţie de formule.

(1) $x \in [1, \ldots, n]$	(4) $x \geq 1$	(6) $1 < x \vee x = 1$
(2) $1 \leq x \leq n$	(5) $x \leq n$	(7) $x < n \vee x = n$
(3) $x \geq 1$ & $x \leq n$		

Nu am specificat ce relaţii există între ele. Ceea ce urmează să accentuăm în secţiunea următoare.

2.1. ŞIRURI DE ECHIVALENŢE

În secţiunea anterioară explicităm (1) $x \in [1, \ldots, n]$ prin (2) $1 \leq x \leq n$. La rândul său (2) devine mai explicit prin *(3)* $x \geq 1$ & $x \leq n$. În ambele cazuri faptul că apartenenţa poate fi reexprimată prin *(2)* şi *(3)* arată că este rezonabil să admitem relaţia de egalitate este prezentă.

[23] *Ibidem*, p. 153.

(1) $x \in [1, \ldots, n] \equiv$ (2) $1 \leq x \leq n \equiv$ (3) $x \geq 1$ & $x \leq n$

Faptul că (3) se descompune în doi membrii: *(4)* $x \geq 1$ şi *(5)* $x \leq n$, înseamnă că ei sunt consecinţe dintr-o conjuncţie. Ceea ce este conform unei teoreme propoziţionale[24]. *(4)* $x \geq 1$ înseamnă că *x este mai mare sau egal cu 1.* Dar mai explicit acesta spune că *(6)* $1 > x \vee x = 1$, adică *x este mai mic decât 1 sau x este egal cu 1*. Faptul că 4 este explicitat prin 6 înseamnă că cele două sunt echivalente. Apoi, *(5)* $x \leq n$ înseamnă: *x este mai mic sau egal cu 1*. Iar (5) se explicitează prin *(7)* $x < n \vee x = n$. Iar (7) înseamnă *x este mai mic decât n sau x este egal cu n*. Faptul că 5 este explicitat prin 7 înseamnă că şi acestea sunt echivalente. Pe scurt, suntem în posesia echivalenţelor:

(4) $x \geq 1 \equiv$ (6) $1 < x \vee x = 1$
(5) $x \leq n \equiv$ (7) $x < n \vee x = n$

(1), (2), (3) nu sunt egale cu (4), (5), (6) sau (7). Cel mult, cele trei au drept concluzii ultimele patru.

3. CONCLUZII ȘI TRANZITIVITĂȚI

Ca regulă de forma *$(A \supset B)$ & $(B \supset C) \supset (A \supset C)$*, tranzitivitatea este considerată iniţial regulă derivată. Ceea ce este considerat greşit. În demonstrarea ei ca regulă derivată intervine o eroare[25]. De unde rezultă necesitatea trecerii ei în rândurile regulilor prime[26].

În forma anterioară, B este termenul mediu al tranzitivităţii. În ambele apariţii este identic şi nu conţine vreun conectiv logic[27]. Am numit această tranzitivitate clasică. În funcţie de termenul mediu al tranzitivităţii, am distins între tranzitivităţi clasice şi neclasice. În această secţiune scoatem în evidenţă inferenţe bazate pe echivalenţele şi tranzitivităţile din secţiunea anterioară.

Am admis că (1) şi (2) sunt echivalente. Atât (1) $\vdash$ (2), cât şi conversa acesteia pot alcătui câte o inferenţă. Aceeaşi reciprocitate este pentru perechea (2), (3). Apare astfel posibilitatea ca între (1) $\vdash$ (2) şi (2) $\vdash$ (3) să se închidă o inferenţă bazată pe tranzitivitate (1) $\vdash$ (3).

[24] T23. $(p \& q) \supset p$, conform cu Cornel Popa, *Logică şi Metalogică*, vol. II, Editura Fundaţiei România de Mâine, Bucureşti, 2002, p. 44.

[25] Gheorghe Enescu, *Axiomatica logicii propoziţiilor*, în vol. *Paradoxuri, Sofisme, Aporii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 2003, p. 245, 247.

[26] Enescu, *op. cit.*, p. 245.

[27] Gabriel Iliescu, *Diagramele Euler şi Tranzitivitatea*, în vol. „Analele USH, Seria Studii de Filosofie”, nr. 10, Editura Fundaţiei România de Mâine, Bucureşti, 2008, p. 146.

Table nr. 1

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$\frac{(1)\ x\in[1, \ldots, n]}{(2)\ 1 \le x \le n}$</td><td colspan="2" align="center">$\frac{(2)\ 1 \le x \le n}{(3)\ x \ge 1\ \&\ x \le n}$</td></tr>
<tr><td align="center">$\frac{(1)\ x\in[1, \ldots, n]}{(2)\ 1 \le x \le n}$</td><td align="center">$\frac{(2)\ 1 \le x \le n}{(1)\ x\in[1, \ldots, n]}$</td><td align="center">$\frac{(2)\ 1 \le x \le n}{(3)\ x \ge 1\ \&\ x \le n}$</td><td align="center">$\frac{(3)\ x \ge 1\ \&\ x \le n}{(2)\ 1 \le x \le n}$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">(reciproc converse)</td><td colspan="2" align="center">(reciproc converse)</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td align="center">$\frac{(1)\ x\in[1, \ldots, n]}{(3)\ x \ge 1\ \&\ x \le n}$
(tranzitivitate 1-2, 2-3)</td><td></td></tr>
</table>

Reţinem concluzia (3) inferenţei (1) $\vdash$ (3). Aceasta este conjuncţie. Conform teoremei deja anunţate, construim alte două inferenţe: (3) $\vdash$ (4) şi (3) $\vdash$ (5). Combinându-le cu inferenţa anterioară (2) $\vdash$ (3), obţinem alte două noi închideri tranzitive: (2) $\vdash$ (4) şi (2) $\vdash$ (5).

De asemenea, lungim linia închiderii tranzitive spre însăşi premisa iniţială a inferenţei (1) $\vdash$ (3). Combinăm aceasta cu inferenţele (3) $\vdash$ (4) şi (3) $\vdash$ (5). Obţinem închiderile transitive: (1) $\vdash$ (4) şi (1) $\vdash$ (5).

Table nr. 2

<table>
<tr><td align="center">$\frac{(3)\ x \ge 1\ \&\ x \le n}{(4)\ x \ge 1}$</td><td align="center">$\frac{(3)\ x \ge 1\ \&\ x \le n}{(5)\ x \le n}$</td><td colspan="2" rowspan="2" align="center">$\frac{(2)\ 1 \le x \le n}{(3)\ x \ge 1\ \&\ x \le n}$
(Reluare)</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">(Eliminarea conjuncţiei din concluzia 3)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td align="center">$\frac{(2)\ 1 \le x \le n}{(4)\ x \ge 1}$</td><td align="center">$\frac{(2)\ 1 \le x \le n}{(5)\ x \le n}$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">(Tranzitivitate 2-4, 2-5)</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">$\frac{(1)\ x\in[1, \ldots, n]}{(3)\ x \ge 1\ \&\ x \le n}$
(Reluare)</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$\frac{(1)\ x\in[1, \ldots, n]}{(4)\ x \ge 1}$
(tranzitivitate 1-3, 3-4)</td><td colspan="2" align="center">$\frac{(1)\ x\in[1, \ldots, n]}{(5)\ x \le n}$
(tranzitivitate 1-3, 3-5)</td></tr>
</table>

Reţinem concluzia (4) a inferenţei (1) $\vdash$ (4) şi (5) a inferenţei (1) $\vdash$ (5). „≥” stă pentru disjunţia dintre > şi =. Ca urmare (4) este echivalentă cu (6), iar (5) este echivalentă cu (7) de mai jos. Pentru ambele avem atât inferenţele: (4) $\vdash$ (6) şi (5) $\vdash$ (7), cât şi reciprocele acestora. În coloana inferenţei (4) $\vdash$ (6) putem închide o tranzitivitate.

Folosim inferenţele (1) $\vdash$ (4) din tabelul anterior şi (4) $\vdash$ (6) din tabelul actual. Obţinem astfel (1) $\vdash$ (6). Apoi conversa lui (4) $\vdash$ (6), anume (6) $\vdash$ (4) se descompune în (6.1) $\vdash$ (4) şi (6.2) $\vdash$ (4).

Similar, folosim inferenţele (1) ⊢ (5) din tabelul anterior şi (5) ⊢ (7) din tabelul actual. Obţinem astfel închiderea tranzitivă (1) ⊢ (7). Apoi conversa lui (5) ⊢ (7), anume (7) ⊢ (5) se descompune în (7.1) ⊢ (5) şi (7.2) ⊢ (5).

Tabel nr. 3

<table>
<tr><td colspan="3">(4) x ≥ 1
(6) 1 < x v x = 1</td><td colspan="3">(5) x ≤ n
(7) x < n v x = n</td></tr>
<tr><td>(4) x ≥ 1
(6) 1 < x v x = 1</td><td colspan="2">(6) 1 < x v x = 1
(4) x ≥ 1</td><td>(5) x ≤ n
(7) x < n v x = n</td><td colspan="2">(7) x < n v x = n
(5) x ≤ n</td></tr>
<tr><td colspan="3">(reciproc converse)</td><td colspan="3">(reciproc converse)</td></tr>
<tr><td>(1) x∈[1, …, n]
(6) 1 < x v x = 1
(tranzitivitate 1-4, 4-6)</td><td>(6.1)
1 < x
(4) x ≥ 1</td><td>(6.2)
x = 1
(4) x ≥ 1</td><td>(1) x∈[1, …, n]
(7) x < n v x = n
(tranzitivitate 1-5, 5-7)</td><td>(7.1)
x < n
(5) x ≤ n</td><td>(7.2)
x = n
(5) x ≤ n</td></tr>
</table>

În final, apartenenţa iniţială *(1) x∈[1, ..., n]* este decompozabilă într-o conjuncţie de două disjuncţii *(6) 1 <x v x = 1* şi *(7) x <n v x = n*.

4. CONCLUZIE, CONJUNCȚIE, CONTRARIETATE

4.1. CONCLUZII PE BAZĂ DE CONJUNCŢIE CA FUNCŢIE DE ADEVĂR

Într-un articol anterior[28], ne bazam pe scindarea funcţiilor de adevăr ale logicii clasice bivalente în funcţii ψ şi funcţii φ. Pentru funcţiile φ există două mulţimi: funcţii-concluzie *Con*(φ) şi funcţii contrare[29] ╕ *(φ)*. Atât semnul pentru contrarietate, cât şi definirea matriceală, date de Dumitru Ghoerghiu, se presupun cunoscute din lucrările autorului[30]. *Con*(φ) se obţin prin aplicarea definiţiei consecinţei la definiţia matriceală a lui φ şi a celorlalte funcţii. ╕ *(φ)* se obţin aplicând negaţia contradicţie ~ asupra celor din *Con*(φ). Cele două mulţimi se notează simbolic, astfel:

1. $Con(\varphi) = \{\gamma_1,..., \gamma_n\}$
2. ╕ $(\varphi) = \{\sim\gamma_1,..., \sim\gamma_n\}$[31]
3. $\varphi \vdash \gamma_1, \ldots, \varphi \vdash \gamma_n$.

[28] Gabriel Iliescu, *Negaţii neclasice, funcţii-concluzive şi funcţii-premise*, în „Probleme de Logică”, vol. XVI, Editura Academiei Române, Bucureşti, 2013, p. 133.

[29] Dumitru Gheorghiu, *Intuiţionism, paraconsistenţă, contrarietate şi subcontrarietate*, în Iancu Lucica, Dumitru Gheorghiu, Roman Chirilă, *Ex falso quodlibet. Studii de logică paraconsistentă*, Editura Tehnică, Bucureşti, 2004, p. 251–254.

[30] *Ibidem*.

[31] Iliescu, *art. cit.*, p. 122.

Expresia 1 înseamnă că putem scrie n inferenţe care au ca premisă o funcţie φ şi concluziile sunt diferite funcţii γ. Ceea ce explicitează 3.

Funcţia φ care ne interesează aici este *p & q*. Ca urmare, reţinem doar acest tip de funcţii. Pentru $\neg$ (*p & q*) reţinem şi echivalentele lor. Astfel, în loc de *p ↙ q* reţinem echivalenta *~p & ~q*. Putem completa schemele 1, 2 şi 3 mai jos. Pe baza formulei 4 construim Tabelul 4 cu cele şase scheme de inferenţă.

4. *Con*(p & q) = {p, p v q, p ⊂ q, p, p ⊃ q, q, p ≡ q}[32]
5. $\neg$ (p & q) = {p ↙ q, p ⊄ q, ~p, p ⊅ q, ~q, p w q}[33]
5.1. $\neg$ (p & q) = {~p & ~q, ~p & q, ~p, p & ~q, ~q, (p v q) & (~p v ~q)}

Tabel nr. 4

6.1.	6.2.	6.3.	6.4.	6.5.	6.6.
p & q	p & q	p & q	p & q	p & q	p & q
p v q	p ⊂ q	P	p ⊃ q	q	p ≡ q[34]

Reluăm inferenţa (1) ⊢ (3). (3) este conjuncţie de disjuncţii *x ≥ 1 & x ≤ n.* Ne propunem să tratăm conjuncţia din perspectiva funcţiilor φ, adică a funcţiilor care au *concluzii* şi *contrare*.

Conform tabelului funcţiilor de adevăr, conjuncţia are şase funcţii de adevăr care îi sunt concluzii. Aplicându-le negaţia-contradicţie, aflăm tot atâtea contrare ale conjuncţiei.

În Tabelul 4 înlocuim p/x ≥ 1, q/x ≤ n. Păstrăm ordinea constantelor logice v, ⊂, ⊃, ≡. Obţinem Tabelul nr. 5 .

Tabel nr. 5

1 x ≥ 1 & x ≤ n x ≥ 1 v x ≤ n	2 x ≥ 1 & x ≤ n x ≥ 1 ⊂ x ≤ n	3 x ≥ 1 & x ≤ n x ≥ 1
4 4. x ≥ 1 & x ≤ n x ≥ 1 ⊃ x ≤ n	5 x ≥ 1 & x ≤ n x ≤ n	**6** 6. x ≥ 1 & x ≤ n x ≥ 1 ≡ x ≤ n

Revenim la echivalenţa *(1) x∈[1, ..., n] ≡...≡ (3) x ≥ 1 & x ≤ n*. Ca urmare înlocuim *x∈[1, ..., n]* cu echivalentul *x ≥ 1 & x ≤ n*. Astfel, concluziile expresiei conjunctive devin concluziile expresiei ce conţine apartenenţa. Practic, aplicăm următoarea închidere tranzitivă.

[32] *Ibidem*, p. 133.
[33] *Ibidem.*
[34] *Ibidem.*

Este similar cu a raţiona pe baza schimbului de echivalente. Fie echivalenţa $\varphi \equiv \beta$. Iar φ are o mulţime de concluzii, Con(φ), fie $\{\gamma_1,\ldots, \gamma_n\}$. Urmează că şi β va avea exact aceeaşi mulţime de concluzii. Adică $\{\gamma_1,\ldots, \gamma_n\}$ vor fi descrise ca Con(β). Ceea ce se obţine prin substituţia lui φ/β pe baza premisei $\varphi \equiv \beta$. Într-un sens mai general, dacă două formule sunt echivalente şi una dintre ele are unele concluzii, atunci se poate spune cu sens şi despre cea de a doua că are şi aceleaşi concluzii. Raţionamentul descris este cel din stânga Tabelului 6.

Tabel nr. 6

$\varphi \equiv \beta$ $\underline{Con(\varphi) = \{\gamma_1,\ldots, \gamma_n\}}$ $Con(\beta) = \{\gamma_1,\ldots, \gamma_n\}$	$\underline{1}$ $\underline{x \in [1, \ldots, n]}$ $x \geq 1 \vee x \leq n$	2 $\underline{x \in [1, \ldots, n]}$ $x \geq 1 \subset x \leq n$	$\underline{3}$ $\underline{x \in [1, \ldots, n]}$ $x \geq 1$
	4 $\underline{4.\ x \in [1, \ldots, n]}$ $x \geq 1 \supset x \leq n$	$\underline{5}$ $\underline{x \in [1, \ldots, n]}$ $x \leq n$	**6** $\underline{6.\ x \in [1, \ldots, n]}$ $x \geq 1 \equiv x \leq n$

4.2. APARTENENŢĂ ŞI CONTRARIETATE

Contradictoria apartenenţei este ceva obişnuit: $\sim(x \in [1, \ldots, n])$ sau $x \notin [1, \ldots, n]$, însemnând că *x nu aparţine şirului de valori 1, ..., n.* Dar are sens să vorbim despre contrarele apartenenţei, $\urcorner(x \in [1, \ldots, n])$? Ipotezăm că da. Raţionamentul este acelaşi ca în cazul mulţimii de concluzii, din secţiunea anterioară. Dacă două formule sunt echivalente, iar una dintre ele are formule contrare, atunci are sens să se spună şi despre cea de a doua că are contrare. Cea de a doua formulă are exact aceleaşi contrare. Deosebirile faţă de raţionamentul omolog anterior sunt că în loc de Con avem $\urcorner$, iar în loc de γ avem $\sim\gamma$.

$$\varphi \equiv \beta$$
$$\underline{\urcorner(\varphi) = \{\sim\gamma_1,\ldots, \sim\gamma_n\}}$$
$$\urcorner(\beta) = \{\sim\gamma_1,\ldots, \sim\gamma_n\}$$

$$p \mathbin{\&} q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$$
$$\underline{\urcorner(p \mathbin{\&} q) = \{p \swarrow q,\ p \not\subset q,\ \sim p,\ p \not\supset q,\ \sim q,\ p \mathrm{w} q\}}$$ [35]
$$\urcorner\sim(\sim p \vee \sim q) = \{p \swarrow q,\ p \not\subset q,\ \sim p,\ p \not\supset q,\ \sim q,\ p \mathrm{w} q\}$$
$$\urcorner\sim(\sim p \vee \sim q) = \{\sim p \mathbin{\&} \sim q,\ \sim p \mathbin{\&} q,\ \sim p,\ p \mathbin{\&} \sim q,\ \sim q,\ (p \vee q) \mathbin{\&} (\sim p \vee \sim q)\}$$

Aplicăm acestea la apartenenţă substituind: $p/\ x \geq 1,\ q/\ x \leq n$. Reţinem varianta cu negaţiile absorbite. Raţionăm ca în schema de mai sus:

[35] *Ibidem.*

1. $x \in [1, \ldots, n] \equiv x \geq 1 \ \& \ x \leq n$

2. $\urcorner (x \geq 1 \ \& \ x \leq n) =$

$\{(x < 1 \ \& \ x > n), (x < 1 \ \& \ x \leq n), (x < 1), (x \geq 1 \ \& \ x > n), (x > n), (x \geq 1 \ w \ x \leq n)\}$

3. $\urcorner (x \in [1, \ldots, n]) =$

$\{(x < 1 \ \& \ x > n), (x < 1 \ \& \ x \leq n), (x < 1), (x \geq 1 \ \& \ x > n), (x > n), (x \geq 1 \ w \ x \leq n)\}$

Ce înseamnă contrarele apartenenţei lui x la valorile *[1, ..., n]*? De exemplu, poate însemna că *valoarea lui x este mai mică decât 1*, *mai mare decât n* împreună sau separat.

Până acum am tras concluzii din apartenenţă $x \in [1, \ldots, n]$, printr-o echivalentă a sa $x \geq 1 \ \& \ x \leq n$. Am folosit substratul semantic dat de definiţiile matriceale.

5. CONCLUZII LA NIVELUL LOGICII PROPOZIŢIONALE

5.1. DISTRIBUŢIE

Conjuncţia invocată mai sus conţine două disjuncţii. Distribuim disjuncţia faţă de conjuncţie[36]. Astfel, obţinem o disjuncţie de patru conjuncţii. Conjuncţia iniţială şi disjuncţia rezultată sunt logic echivalente. Ceea ce înseamnă că sunt reciproce, una concluzia celeilalte. Ilustrăm această idee în Tabelul 7. Interesează inferenţa 7.2 care se poate descompune. Mai întâi, scindăm astfel încât fiecare dintre cei patru să fie disjuncţiei premisă pentru conjuncţia iniţială, ca în Tabelul 8. Apoi, fiecare inferenţă din tabelul 8 se scindează în câte două raţionamente. Încât fiecare dintre cei patru membrii ai disjuncţiei are succesiv drept concluzie pe câte unul din cei doi membrii ai conjuncţiei iniţiale. Ceea ce se întâmplă în Tabelul 9.

Tabel nr. 7

7.1	7.2
<u>(p v q) & (r v s)</u>	<u>(p & r) v (p & s) v (q & r) v (q & s)</u>
(p & r) v (p & s) v (q & r) v (q & s)	(p v q) & (r v s)

Tabel nr. 8

8.1	8.2	8.3	8.4
<u>p & r</u>	<u>p & s</u>	<u>q & r</u>	<u>q & s</u>
(p v q) & (r v s)	(p v q) & (r v s)	(p v q) & (r v s)	(p v q) & (r v s)

[36] 15.1.12, conform cu Cornel Popa, *Logică şi Metalogică*, vol. I, Editura Fundaţiei România de Mâine, Bucureşti, 200, p. 117.

Tabel nr. 9

9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8
$\frac{p \,\&\, r}{p \vee q}$	$\frac{p \,\&\, r}{r \vee s}$	$\frac{p \,\&\, s}{p \vee q}$	$\frac{p \,\&\, s}{r \vee s}$	$\frac{q \,\&\, r}{p \vee q}$	$\frac{q \,\&\, r}{r \vee s}$	$\frac{q \,\&\, s}{p \vee q}$	$\frac{q \,\&\, s}{r \vee s}$

(p v q) & (r v s) din Tabelul 8 este forma propoziţională echivalentă cu expresia apartenenţei. Echivalenţa acestei conjuncţii cu apartenenţa permite înlocuirea cu echivalenţa ei. Astfel, se scurtează relaţia dintre premisa arătată şi apartenenţă. În timp ce *p v q* şi *r v s* sunt „jumătăţi" ale acestei apartenenţe. Astfel se pot formula inferenţe mai simple.

5.2. APLICAREA NIVELULUI PROPOZIŢIONAL LA COMPONENTE ALE APARTENENŢEI

În Tabelul 8 substituim astfel: p/x = 1, q/x >1, r/ x = n, s/x < n. Obţinem astfel omologul tabelului 8 instanţiat cu datele apartenenţei.

Tabel nr. 10

10.1.	10.2.
$\frac{x = 1 \,\&\, x = n}{(x = 1 \vee x > 1) \,\&\, (x = n \vee x < n)}$	$\frac{x = 1 \,\&\, x < n}{(x = 1 \vee x > 1) \,\&\, (x = n \vee x < n)}$
10.3.	10.4.
$\frac{x > 1 \,\&\, x = n}{(x = 1 \vee x > 1) \,\&\, (x = n \vee x < n)}$	$\frac{x > 1 \,\&\, x < n}{(x = 1 \vee x > 1) \,\&\, (x = n \vee x < n)}$

Aici putem scinda drumul bazându-ne pe două scheme de inferenţă din tabelul 11.

Schema 11.1 ţine de scopul articolului actual privitor la apartenenţă. Prin ea scurtăm drumul spre relaţia de apartenenţă iniţială. Dacă din setul de premise A se deduce concluzia B, iar B este echivalent cu C, atunci din A se deduce şi C.

Schema 11.2 ţine de un posibil scop generic de a avea raţionamente cât mai simple, de exemplu, cu concluzii mai scurte. Aceasta nu are legătură cu apartanenţa. Conjuncţia echivalentă cu apartenenţa se descompune aici. Dacă din A derivă o concluzie de formă conjunctivă, atunci fiecare dintre membrii conjuncţiei va fi o concluzie separată a lui A. Concluziile sunt părţi ale apartenenţei.

Tabel nr. 11

11.1.	11.2
$A \vdash B$	$\underline{A \vdash B \,\&\, C}$
$\underline{B \equiv C}$	$A \vdash B$
$A \vdash C$	$A \vdash C$

Pornim de la schema 11.1. Pentru a obţine cele patru scheme de mai jos substituim după cum urmează.

Pentru 1 substituim: $A/x = 1 \ \& \ x = n$; $B/(x = 1 \lor x > 1) \ \& \ (x = n \lor x < n)$; $C/x \in [1, \ldots, n]$.
Pentru 2 substituim: $A/x = 1 \ \& \ x < n$; $B/(x = 1 \lor x > 1) \ \& \ (x = n \lor x < n)$; $C/x \in [1, \ldots, n]$.
Pentru 3 substituim: $A/x > 1 \ \& \ x = n$; $B/(x = 1 \lor x > 1) \ \& \ (x = n \lor x < n)$; $C/x \in [1, \ldots, n]$.
Pentru 4 substituim: $A/x > 1 \ \& \ x < n$; $B/(x = 1 \lor x > 1) \ \& \ (x = n \lor x < n)$; $C/x \in [1, \ldots, n]$.

Echivalenţa $B \equiv C$ este instanţiată prin $(x = 1 \lor x > 1) \ \& \ (x = n \lor x < n) \equiv x \in [1, \ldots, n]$. Instanţiem schema 11.1 în tabelul 12 prin substituţia pentru 1. Obţinem inferenţa 12.2 ca o concluzie a schemei 12.1.

Table nr. 12

12.1	12.2
$x = 1 \ \& \ x < n \vdash (x = 1 \lor x > 1) \ \& \ (x = n \lor x < n)$ $\underline{(x = 1 \lor x > 1) \ \& \ (x = n \lor x < n) \equiv x \in [1, \ldots, n]}$ $x = 1 \ \& \ x < n \vdash x \in [1, \ldots, n]$	$\underline{x = 1 \ \& \ x < n}$ $x \in [1, \ldots, n]$

Pe baza aceleiaşi scheme din tabelul de mai sus, redăm direct inferenţele rezultate. Tabelul 13 nu doar este omolog al tabelului 8 cu substituţiile aplicate. Inferenţele sale sunt inferenţe-concluzii ale schemei 11.1 din Tabelul 11.

Tabel nr. 13

13.1	13.2	13.3	13.4
$\underline{x = 1 \ \& \ x = n}$ $x \in [1, \ldots, n]$	$\underline{x = 1 \ \& \ x < n}$ $x \in [1, \ldots, n]$	$\underline{x > 1 \ \& \ x = n}$ $x \in [1, \ldots, n]$	$\underline{x > 1 \ \& \ x < n}$ $x \in [1, \ldots, n]$

Tot din Tabelul 11, reactualizăm schema 11.2. Aceasta nu ţine neapărat de apartenenţă, ci de scopul de a avea raţionamente cât mai simple. În acest caz, în loc de un raţionament cu o concluzie conjunctivă din doi membrii, obţinem două raţionamente. Ambele au aceeaşi premisă şi concluzia este câte un membru al conjuncţiei. Menţionăm substituţiile aplicate în 11.2:

Pentru 1 substituim: $A/x = 1 \ \& \ x = n$; $B/(x = 1 \lor x > 1)$; $C/(x = n \lor x < n)$.
Pentru 2 substituim: $A/x = 1 \ \& \ x < n$; $B/(x = 1 \lor x > 1)$; $C/(x = n \lor x < n)$.
Pentru 3 substituim: $A/x > 1 \ \& \ x = n$; $B/(x = 1 \lor x > 1)$; $C/(x = n \lor x < n)$.
Pentru 4 substituim: $A/x > 1 \ \& \ x < n$; $B/(x = 1 \lor x > 1)$; $C/(x = n \lor x < n)$.

Instanţiem schema 11.2 în plan orizontal, în tabelul 14 Schema obţinută are concluzie conjunctivă. Ceea ce permite derivarea a două inferenţe-concluzii 14.2 şi 14.3. Acestea la rândul lor au drept concluzie câte un membru al conjuncţiei din concluzia lui 14.1.

Tabel nr. 14

14.1. $\underline{x = 1 \;\&\; x = n \vdash (x = 1 \text{ v } x > 1) \;\&\; (x = n \text{ v } x < n)}$
14.2. $x = 1 \;\&\; x = n \vdash x = 1 \text{ v } x > 1$
14.3. $x = 1 \;\&\; x = n \vdash x = n \text{ v } x < n$

În Tabelul 15 redăm toate inferenţele ce pot fi obţinute prin schema Tabelului 14. Acestea sunt 15.1 – 15.8. scrise vertical. Pentru fiecare pereche de inferenţe ar exista câte o inferenţă-premisă de felul lui 14.1. Dar aici sunt menţionate doar inferenţele-concluzii.

Tabel nr. 15

15.1 $\dfrac{x = 1 \;\&\; x = n}{x = 1 \text{ v } x > 1}$	15.2 $\dfrac{x = 1 \;\&\; x = n}{x = n \text{ v } x < n}$	15.3 $\dfrac{x = 1 \;\&\; x < n}{x = 1 \text{ v } x > 1}$	15.4 $\dfrac{x = 1 \;\&\; x < n}{x = n \text{ v } x < n}$
15.5 $\dfrac{x > 1 \;\&\; x = n}{x = 1 \text{ v } x > 1}$	15.6 $\dfrac{x > 1 \;\&\; x = n}{x = n \text{ v } x < n}$	15.7 $\dfrac{x > 1 \;\&\; x < n}{x = 1 \text{ v } x > 1}$	15.8 $\dfrac{x > 1 \;\&\; x < n}{x = n \text{ v } x < n}$

Tabelul 15 este prefigurat la nivel de logică propoziţională în Tabelul 9. În limbajul componentelor apartenenţei, îl precedă Tabelul 10 din care este obţinut prin intermediul schemei 11.2 din Tabelul 11.

6. CONCLUZII ŞI DESCHIDERI

După foarte puternice aparenţe, relaţia de apartenenţă a unui element la o mulţime nu este o funcţie de adevăr. Totuşi, ea poate fi redusă la o funcţie de adevăr prin simpla considerare a exprimării ei naturale. Astfel, ea este premisă a unor concluzii deductibile din ea. Ceea ce se arată încă de la prima inferenţă. Pe această cale apartenenţa poate fi făcută să participe la relaţia de consecinţă logică într-o dublă calitate, de premisă şi de concluzie.

La întrebarea inţială am răspuns afirmativ. Cu toate că pare o relaţie primă, elementară, între element şi mulţime, simpla reexprimare naturală scoate în evidenţă că este reductibilă la conjuncţie. Prin aceasta drumul spre construcţia de inferenţe este deschis.

Demersul a fost posibil pentru că am presupus că elementul mulţime al apartenenţei este specificat printr-un şir de valori. A urmat de la sine că apartenenţa este conectabilă şi cu relaţiile de ordine.

Am reexprimat apartenenţa printr-o funcţie de adevăr, în speţă cea a conjuncţiei. Prin însăşi aceasta a urmat că are *concluzii* şi *contrare*, ca şi funcţia al cărei caz particular este. În speţă, am arătat care sunt *contrarele*, nu contradicţia apartenenţei. Ultima fiind uşor de construit prin simpla adăugare a negaţiei clasice.

Am beneficiat de posibilitatea de a distribui conjuncţia faţă de disjuncţie, o astfel de transformare fiind una de echivalenţă. Am obţinut o simplificare în două etape a inferenţelor referitoare la apartenenţă. Am putut arăta astfel ce conjuncţii elementare pot să fie premise ale apartenenţei, dar şi cum se pot simplifica aceste inferenţe prin scindarea conjuncţiilor din concluzie.

O deschidere a preocupării de aici ar putea porni de la echivalenţa $x \in F \equiv F(x)$. Este vorba atât de a considera apartenenţa ca un atom predicativ, cât şi de a aplica unele generalizări existenţiale şi, în genere, de a introduce cuantificări. O altă deschidere ar putea fi spre ideea de grade apartenenţă. Perspectiva wrighteană, pe care o oferă $p \equiv p\ T\ q\ v \sim q$[37], ca perspectivă dinamizatoare nu este nici ea lipsită de interes. Toate aceste perspective ar putea fi subordonate tărâmului aplicativ în ştiinţele socioumane.

BIBLIOGRAFIE

1. Enescu, Gheorghe, *Axiomatica logicii propoziţiilor*, în vol. *Paradoxuri, Sofisme, Aporii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 2003.
2. Enescu, Gheorghe, *Logică Simbolică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1971.
3. Enescu, Gheorghe, *Tratat de Logică*, Editura Lider, Bucureşti, 1997.
4. Gheorghiu, Dumitru, *Intuiţionism, paraconsistenţă, contrarietate şi subcontrarietate*, în Iancu Lucica, Dumitru Gheorghiu, Roman Chirilă, *Ex falso quodlibet. Studii de logică paraconsistentă*, Editura Tehnică, Bucureşti, 2004.
5. Iliescu, Gabriel, *Diagramele Euler şi Tranzitivitatea*, în vol. „Analele USH, Seria Studii de Filosofie", nr. 10, Editura Fundaţiei România de Mâine, Bucureşti, 2008.
6. Iliescu, Gabriel, *Negaţii neclasice, funcţii-concluzive şi funcţii-premise*, în „Probleme de logică", vol. XVI, Editura Academiei Române, Bucureşti, 2013.
7. Podaru, Vasile şi Cornaciu, Veronica, *Logică matematică şi computaţională*, Universitatea Titu Maiorescu, Bucureşti, 2016.
8. Popa, Cornel, *Logică şi Metalogică*, vol. I, Editura Fundaţiei România de Mâine, Bucureşti, 2000.
9. Popa, Cornel, *Logică şi Metalogică*, vol. II, Editura Fundaţiei România de Mâine, Bucureşti, 2002.
10. von Wright, Henrik, Georg, *Explicaţie şi înţelegere*, Editura Humanitas, Bucureşti, 1995

[37] von Wright, Henrik, Georg, *Explicaţie şi înţelegere*, Editura Humanitas, Bucureşti, 1995, p. 64.