WITTGENSTEIN DESPRE FILOSOFIA RUSSELLIANĂ A MATEMATICII

MIRCEA FLONTA
Universitatea din Bucureşti
Academia Română

Wittgenstein about Russell's Philosophy of Mathematics. In his notes about the foundations of mathematics, Wittgenstein regarded mathematics as part of the history of human being. From this perspective, he suggested a new view about logic, mathematics, language and science and criticized the Russellian attempt to derive mathematics from logic, especially the Russellian definition of number.

Keywords: natural history of human being, logic, mathematics, rule, calculus, proof, definition of number.

În autobiografia sa intelectuală, publicată la bătrâneţe, sub titlul *Evoluţia mea filosofică* (1959), Bertrand Russell prezintă şi discută diferite reacţii faţă de *Principia Mathematica*. El observa că există o distincţie între modul în care s-au raportat la *Principia Mathematica*, pe de o parte, filosofi ai matematicii de orientare formalistă sau intuiţionistă şi, pe de altă parte, fostul său student Ludwig Wittgenstein. Cei dintâi, constata Russell, au criticat programul lucrării „din afară", iar ultimul „dinăuntru". Atacurile primilor ar fi fost uşor de respins, în timp ce observaţiile celui din urmă meritau atenţie[1]. Russell se referea la observaţii critice, formulate de Wittgenstein, în *Note despre logică* (1913), *Note dictate lui G.E. Moore în Norvegia* (1914) şi *Tractatus logico-philosophicus*[2]. Şi preciza, totodată, că tot ce-a scris Wittgenstein ulterior „nu l-a interesat". Adică, nu l-au interesat observaţiile din însemnări mai târzii ale lui Wittgenstein cu privire la programul derivării matematicii, dezvoltat în *Principia Mathematica*. Ceea ce îmi propun să arăt este că aceste însemnări nu mai conţin ceea ce am putea numi critici „dinăuntru". Spre deosebire

[1] Vezi B. Russell, *My Philosophical Development*, London, G. Allen &Unwin LTD., 1959, p. 112.

[2] Vezi traducerea în română a primelor două texte de către Andreea Eşanu în *Ludwig Wittgenstein. Scrisori despre Tractatus*, Humanitas, 2012. Şi L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, ediţia a doua, traducere de M. Dumitru şi M. Flonta, Humanitas, 2012. Pentru o mai bună înţelegere a remarcei lui Russell că observaţiile critice ale lui Wittgenstein din aceste texte au fost formulate „dinăuntru", vezi de asemenea Andreea Eşanu, *Note despre notele lui Wittgenstein*, în cel dintâi volum.

Rev. filos., **LXII**, *2*, p. 161–172, Bucureşti, 2015

de criticile din lucrări de tinerețe, care au caracter mai tehnic, este vorba, în acest caz, de observații care prezintă un interes filosofic principial. Observațiile critice ale lui Wittgenstein decurgeau din vederi fundamental diferite de cele ale lui Russell asupra logicii şi matematicii, ca şi asupra limbajului şi ştiinței. Prin urmare, ele pot fi apreciate drept „critici din afară”.

În cele ce urmează, voi încerca să caracterizez opoziția dintre abordarea relației dintre logică şi matematică la Russell şi la Wittgenstein. Voi insista îndeosebi asupra acelei orientări a gândirii care susține criticile formulate de Wittgenstein la adresa programului din *Principia Mathematica*. Voi invoca şi discuta unele remarce făcute de Wittgenstein în însemnările sale asupra fundamentelor matematicii, precum şi în lecțiile sale de Cambridge, din anii 1932–35.

După cum se ştie, obiectivul, formulat explicit şi urmărit până în detalii în *Principia Mathematica*, a fost să se arate că matematica reprezintă o prelungire a logicii. La bătrânețe, Russell a reafirmat că scopul principal al acestei ample lucrări a fost „să arate că întreaga matematică decurge din premise în întregime logice şi foloseşte doar concepte care pot fi definite în termeni logici”[3]. Nu într-un mod diferit s-au exprimat Russell şi Whitehead în primul volum al scrierii, publicat în noiembrie 1910. În *Prefață* se afirmă că lucrarea înfățişează o „teorie a principiilor matematicii” care permite „deducerea” matematicii obişnuite. Autorii nu susțin însă că analiza nu ar putea fi împinsă mai departe: „Tot ceea ce este afirmat este că noțiunile şi axiomele cu care începem sunt suficiente, nu că ele sunt necesare”[4]. În cele ce urmează, se arată că aceste noțiuni şi axiome aparțin logicii matematice. Secțiunea A din partea întâi, intitulată *Teoria deducției*, debutează cu precizarea: „Țelul acestei secțiuni este să expună prima etapă a deducerii matematicii pure din fundamentele ei logice”[5]. Înfăptuirea unui program, caracterizat în acest mod, răspundea viziunii lui Russell cu privire la țelul suprem al activității teoretice: reducerea numărului entităților de bază, potrivit principiului numit „briciul lui Ockam”. Ceea ce l-a preocupat pe Russell, potrivit propriilor sale mărturisiri, a fost asigurarea certitudinii matematice prin derivarea diferitelor ei părți componente, în primul rând aritmeticii, din concepte şi relații logice. Cu alte cuvinte, asigurarea matematicii prin derivarea din ceea ce se consideră cel mai bine asigurat, din fundamentele logicii. Este o modalitate de a sublinia certitudinea matematicilor în raport cu toate cunoştințele bazate pe experiență, adică de a înfățişa matematica drept o ştiință care satisface în cea mai mare măsură idealul clasic al cunoaşterii ca

[3] B. Russell, *op. cit.*, p. 74.

[4] Vezi A.N. Whitehead, B. Russell, *Principia Mathematica to 56*, Cambridge University Press, 1997, pp. v–vi.

[5] *Op. cit.*, p. 90. În prezentarea volumului de către Cambridge University Press, programul urmărit în lucrare este caracterizat astfel: „Scopul ei este să deducă toate propozițiile fundamentale ale logicii şi matematicii dintr-un număr mic de premise logice şi noțiuni primitive şi să dovedească, în acest fel, că matematica este o dezvoltare a logicii.”

episteme. Chiar făcând abstracţie de acest ideal al cunoaşterii pe deplin asigurate, Russell era convins că cea mai înaltă aspiraţie a gândirii, a cărei promovare merită toate eforturile, este progresiunea de la diversitate la unitate. În propriile sale cuvinte: „Dacă avem de-a face cu un stoc determinat de enunţuri – ca în matematica pură sau în fizica teoretică – aceste enunţuri pot fi derivate dintr-un număr de presupoziţii de bază, formulate cu ajutorul unor concepte de bază nedefinite, şi tot ceea ce ne îngăduie să micşorăm numărul conceptelor de bază nedefinite şi a presupoziţiilor nedemonstrabile reprezintă un progres autentic… Din acest punct de vedere, am găsit îmbucurător faptul că matematica este reductibilă la logică. Matematicianul Kronecker spunea că «Dumnezeu a creat numerele întregi şi tot restul, aşadar, fracţiile, numerele reale, numerele imaginare şi numerele complexe sunt opera omului.» … am fost de aceea deosebit de fericit atunci când, în cele din urmă, şi acestea au putut dispărea de pe scenă şi activitatea creatoare a lui Dumnezeu a fost necesară numai pentru concepte pur logice ca «sau», «toţi» şi «unii» … Cu alte cuvinte: numărul de presupoziţii care erau necesare pentru a garanta adevărul matematicii pure s-a micşorat.”[6] Russell a abordat problema fundamentelor matematicii condus de convingerea că primele propoziţii ale logicii reprezintă adevăruri primare şi, prin urmare, derivarea din aceste propoziţii a unui număr cât mai mare de propoziţii recunoscute drept adevărate reprezintă o realizare de primă importanţă a gândirii filosofice.

Cu totul alta a fost abordarea lui Wittgenstein. Cu privire la punctul de plecare şi de sprijin a acestei abordări, observaţiile sale asupra fundamentelor matematicii conţin o indicaţie care merită, cred eu, atenţie: „Ceea ce oferim sunt, de fapt, observaţii cu privire la istoria naturală a omului; dar nu contribuţii cu privire la cazuri rare, ci constatări despre fapte care nu au fost puse la îndoială de nimeni şi scapă observaţiei doar deoarece ele se perindă permanent prin faţa ochilor noştri.”[7] Despre ce este vorba aici? Ce avea în vedere Wittgenstein? Un răspuns direct la aceste întrebări nu găsim în însemnările sale. Este plauzibilă însă presupunerea că, vorbind despre „istoria naturală a omului”, Wittgenstein avea în vedere activităţi din cele mai obişnuite şi jocuri de limbaj care sunt asociate acestor activităţi. Aşadar, o mare varietate de situaţii în care ceea ce fac oamenii şi ceea ce spun oamenii, activităţile lor şi expresiile limbajului, sunt strâns asociate. Acestea sunt fapte ce pot scăpa observaţiei „doar deoarece ele se perindă permanent prin faţa ochilor noştri”. Dar doar deoarece scapă observaţiei este important să revenim continuu asupra acestor fapte, credea Wittgenstein. Numai în acest fel va putea fi contracarată o tendinţă care se exprimă cel mai clar în gândirea filosofică, tendinţa de a căuta şi de a evidenţia doar ceea ce apropie lucruri diferite, ceea ce este

[6] B. Russell, *My Philosophical Development*, p. 219.

[7] L. Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Frankfurt am Main, SuhrkampVerlag, 1984, p. 92.

comun, tendința de a reduce ceva la altceva. Ca şi în cazul multor altor subiecte care atrag atenția filosofilor, în reflecția asupra matematicii această tendință va putea fi contrabalansată prin atenția acordată „istoriei naturale a omului”. Se poate arăta că tocmai orientarea spre ceea ce Wittgenstein numeşte „istoria naturală a omului” susține multe dintre observațiile sale critice la adresa programului lui Russell, observații cuprinse în însemnările sale despre fundamentele matematicii.

Privite din perspectiva „istoriei naturale”, propozițiile logicii şi matematicilor se aseamănă şi se deosebesc în anumite privințe. Ele se aseamănă prin ceea ce le opune propozițiilor bazate pe experiență. Ultimele ne spun ceva despre lucruri care pot să fie aşa sau altfel, în timp ce primele exprimă necesitatea proprie oricărei reguli. Wittgenstein nota: „Propoziția matematică are demnitatea unei reguli. *Asta* este adevărat în faptul că matematica este logică; ea se mişcă în regulile limbajului nostru. Iar aceasta îi conferă duritatea (*Festigkeit*) ei deosebită, poziția ei separată şi de neatacat.”[8] Ca şi în logică, în matematică dovada, demonstrația, va avea, de aceea, un caracter constrângător. „Demonstrația trebuie să fie un demers despre care spun: Da, aşa trebuie să fie; asta trebuie să rezulte dacă procedezi după această regulă.”[9] Caracteristica este comună demonstrației euclidiene, demonstrației unei propoziții aritmetice ca $25 \times 25 = 625$ sau demonstrației logice. Wittgenstein insistă asupra ideii că această caracteristică apropie matematica de toate acele operații care se desfăşoară, urmându-se pas cu pas reguli: „Dacă matematica ar fi golită de orice conținut, ceea ce ar rămâne ar fi că anumite semne pot fi construite potrivit anumitor reguli”[10]. A examina sisteme matematice din perspectiva istoriei naturale a omului înseamnă, între altele, a nu pierde din vedere aplicațiile lor. Căci tocmai în aceste aplicații iese în evidență relația operațiilor matematice cu o mare varietate de alte operații pe care le realizează oamenii. Învățăm în şcoală să facem operații aritmetice elementare cu ajutorul abacului, adică prin operații în care manipulăm obiecte. Abia mai târziu, devenim mai capabili că calculăm cu numere fără a ne mai raporta la obiecte materiale. Învățăm, prin urmare, primele elemente ale aritmeticii prin operații asupra obiectelor. Şi nu prin raportare la propoziții, funcții, la lucruri cum ar fi definiția numărului. Şi asta nu deoarece acestea din urmă ar fi greu de înțeles de către copii, ci deoarece progresiunea normală în învățare este cea de la lucruri mai familiare spre altele care seamănă în anumite privințe cu ele[11]. Ceea ce apropie calculele şi demersurile demonstrative din diferite sisteme matematice de acea succesiune de operații care survine în orice tehnică standardizată, sublinia

[8] *Op. cit.*, p. 99.

[9] *Ibidem*, p. 160. Şi mai departe: „Să ne gândim că în matematică suntem convinşi de propoziții *gramaticale*; expresia, rezultatul acestei convingeri, este că noi *acceptăm o regulă*.” (p. 162).

[10] *Ibidem*, p. 169.

[11] „Aritmetica este un calcul şi ea stă cu aplicarea oarecum în aceeaşi relație în care stă o paradigmă cu acele lucruri a căror paradigmă este.” (*Wittgenstein's Lectures. Cambridge 1932–35*, edited by Alice Ambrose, Promotheus Books, Amherst, New York, 2001, p. 127).

Wittgenstein, este evidența (*Sichtbarkeit*), posibilitatea de a cuprinde cu privirea şi de a controla conformitatea cu regulile a fiecărui pas. În toate aceste operații, sub multe aspecte foarte diferite, rezultatul decurge cu necesitate la capătul unei secvențe de paşi în care sunt urmate reguli. Este acea necesitate care apare în forma cea mai pregnantă în demersurile demonstrative. „«Demonstrația trebuie să poată fi cuprinsă cu privirea» înseamnă, de fapt, nimic altceva decât: demonstrația nu este un experiment. Ceea ce este dat în demonstrație noi acceptăm nu fiindcă rezultă o dată sau deoarece rezultă adesea. Ci noi vedem în demonstrație temeiul pentru a spune că *trebuie* să rezulte aşa."[12]

Examinarea lucrurilor din perspectiva faptelor istoriei naturale a omului ne arată de asemenea că sistemele matematice se deosebesc mult între ele. Ceea ce era de aşteptat, dacă avem în vedere că aceste sisteme sunt tehnici care s-au dezvoltat, prin abstracții succesive, pornind de la tehnici practice foarte diferite de operare cu obiectele. Dacă folosim cuvântul *matematică* pentru a desemna o mare diversitate de asemenea sisteme, atunci va trebui să ne fie clar că termenul nu indică existența uneia sau mai multor trăsături care le-ar fi comune tuturor acestor sisteme, ci mai degrabă asemănări care există între tehnici cum sunt cele ale algebrei, geometriei, trigonometriei şi aşa mai departe. Este tema asupra căreia insistă Wittgenstein în însemnările sale vorbind despre „caracterul pestriț al matematicii" (*Buntheit der Mathematik*).

Tot din perspectiva istoriei naturale a omului, Wittgenstein respingea acum punctul de vedere, pe care l-a adoptat şi el în *Tractatus*, punctul de vedere care arată că logica ar fi singurul calcul fundamental care ar servi drept fundament tuturor celorlalte calcule. El respingea acel punct de vedere pe care se sprijină supoziția că logica reprezintă fundamentul matematicii. Wittgenstein s-a exprimat clar în această privință încă în lecțiile pe care le-a susținut la Cambridge în 1932–33, sub titlul *Filosofie pentru matematicieni*: „Există un substrat pe care se sprijină matematica? Este logica fundamentul matematicii? Din punctul meu de vedere logica matematică este pur şi simplu o parte a matematicii. Calculul lui Russell nu este fundamental. Nu este altceva decât un alt calcul."[13] Există, aşadar, o diversitate de calcule. Niciun calcul nu este fundamental în raport cu toate celelalte. Cuvintele *logică* şi *matematică* stau pentru o diversitate de calcule. Şi iată ce spunea Wittgenstein, în această privință mai târziu, într-o lecție ținută la începutul anului

[12] L. Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, p. 170. Într-o altă formulare: „«Demonstrația trebuie să fie cuprinsă cu privirea» vrea să ne îndrepte, de fapt, atenția asupra deosebirii dintre noțiunile «a repeta o demonstrație» şi «a repeta un experiment». A repeta o demonstrație nu înseamnă a reproduce condițiile în care a fost obținut o dată un anumit rezultat, ci înseamnă a repeta fiecare treaptă *şi rezultatul*. Și deşi demonstrația este astfel ceva care trebuie să poată fi reprodus în mod pe deplin automat, totuşi fiecare asemenea reproducere va trebui să conțină constrângerea demonstrativă a recunoaşterii rezultatului." (*Ibidem*, p. 187).

[13] *Wittgenstein's Lectures*, p. 205.

1935: „Ideea că logica dă forma generală a unui enunț matematic se năruie dacă vedem că nu există un asemenea lucru ca o noțiune a propoziției sau a logicii. Dacă vedem asta, atunci putem înlătura ideea, pe care au avut-o Russell şi Frege, că logica este o ştiință despre anumite obiecte – propoziții, funcții, constantele logice – şi că logica este asemănătoare unei ştiințe a naturii, ca zoologia, că ea vorbeşte despre aceste obiecte aşa cum zoologia vorbeşte despre animale. Ca o ştiință a naturii, se poate presupune că ea poate descoperi anumite relații… Dar logica este un calcul, nu o ştiință a naturii, şi în ea pot fi făcute invenții, dar nu descoperiri."[14]

Dacă dorim să evidențiem nota distinctivă a confruntării lui Wittgenstein cu programul de reducere a matematicii la logică, care a fost dezvoltat în *Principia Mathematica*, pare potrivit să pornim de la această reflecție: „În filosofie este întotdeauna bine ca în locul răspunsului la o întrebare să punem o *întrebare*. Căci un răspuns dat întrebării filosofice poate lesne să fie incorect; înlăturarea întrebării cu ajutorul altei întrebări nu este."[15]

Întrebării lui Russell „Cum să asigurăm certitudinea matematicii?", Wittgenstein îi răspunde cu întrebarea: „Este oare necesară asigurarea certitudinii demersurilor matematice şi a rezultatelor acestora?" Ceea ce sublinia Wittgenstein este că certitudinea matematicii nu se cere asigurată din afară, bunăoară prin derivarea diferitelor ei sisteme din ceva care ar fi mai bine asigurat, din logică. Un demers care posedă constrângere demonstrativă nu are nevoie de nicio altă asigurare, de o întemeiere suplimentară. Calculul şi aplicarea calculului îşi poartă ele însele de grijă. Tocmai deoarece rezultatul unui calcul aritmetic şi aplicarea acestui calcul posedă constrângere demonstrativă, nu este câtuşi de puțin necesar să se arate, cum încerca să arate Russell, că o expresie cum ar fi 1000 + 1000 = 2000 este o tautologie. Răspunsului lui Russell la întrebarea cum este posibilă asigurarea unui calcul aritmetic şi a aplicațiilor sale prin derivare dintr-un calcul logic, Wittgenstein îi opune întrebarea de ce este necesar un asemenea demers. Faptul că pentru o propoziție aritmetică se poate da şi o demonstrație bazată pe derivarea ei dintr-un calcul logic nu arată că acea propoziție se sprijină pe demonstrația din urmă: „Am eu însă nevoie de o demonstrație dintr-un alt sistem pentru a mă convinge că în prima demonstrație am calculat greşit? Nu este oare suficient să scriu această demonstrație într-un mod care poate fi cuprins cu privirea?"[16] Rezultatele calculelor matematice ni se impun constrângător deoarece la fiecare pas al calculului este urmată o regulă. Mai este, atunci, necesară justificarea acestor reguli prin derivarea lor din reguli ale logicii? Wittgenstein crede că o asemenea justificare nu este câtuşi de puțin necesară. Regulile însele pot fi foarte bine justificate prin utilitatea şi succesul operațiilor la care conduc.

[14] *Ibidem*, pp. 138–139.
[15] L. Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, p. 147.
[16] *Ibidem*, pp. 152–153.

Această observaţie arată cât de diferită este orientarea gândirii lui Wittgenstein de acea orientare a gândirii care susţine programul lui Russell. Celor care afirmă, aşa cum o face Russell, că derivarea unor segmente ale matematicii, cum este aritmetica, din logică ar fi importantă pentru că în acest fel adevărurile matematice vor fi întemeiate în modul cel mai ferm, Wittgenstein le răspunde întrebându-se: „Ce înseamnă că un calcul matematic este adevărat?”, „Când spunem noi că un calcul matematic este adevărat?” Iar răspunsul său este că despre un calcul, ca o succesiune de paşi potrivit unor reguli, se poate tot aşa de puţin spune că este adevărat cât se poate spune asta despre limbajul nostru. Calculul este folositor, se aplică cu succes[17]. Valoarea diferitelor tehnici matematice se exprimă prin aplicaţiile lor. Importante sunt acele iniţiative care conduc la inventarea unor tehnici noi. Şi programul lui Russell s-ar putea justifica dacă s-ar putea dovedi productiv în această direcţie. Wittgenstein este însă sceptic în această privinţă. El observă că dacă cercetarea matematică ar fi fost făcută, de la început, doar în cadrele stabilite prin programul lui Russell, atunci multe tehnici matematice, bunăoară calculul diferenţial, nu ar fi fost descoperite până astăzi[18].

Wittgenstein nu socotea, aşadar, doar că reducerea tehnicilor matematice la calcule logice nu ar răspunde unor nevoi reale ale cercetării. El înclina să creadă că o asemenea întreprindere ar putea fi păgubitoare. Pe de o parte, deoarece nu ar stimula invenţia matematică. „Aş dori să spun: întemeierea matematicii dată de Russell marginalizează interesul pentru introducerea unor noi tehnici până ce, în cele din urmă, se crede că ea nu mai este necesară.”[19] Pe de altă parte, Wittgenstein aprecia că încercările de a deriva sisteme matematice foarte diferite din unul şi acelaşi simbolism al logicii abat atenţia de la observarea de la ceea ce le deosebeşte şi ascund astfel „caracterul pestriţ al matematicii”. Reflecţii de acest gen par să arate că Wittgenstein, spre deosebire de Russell, încerca să privească lucrurile din punctul de vedere al celui ce practică cercetarea matematică, şi nu al teoreticianului care este preocupat înainte de toate să dezvăluie unitatea dincolo de diversitate. În însemnările lui Wittgenstein întâlnim destule observaţii semnificative în acest sens. Unele transmit ideea prin imagini ca aceasta: „Simbolurile lui Russell înfăşoară formele principale ale demonstraţiei oarecum până a le face de nerecunoscut, ca şi atunci când o statură omenească este înfăşată în multe cârpe”[20]. „Ce vrea să arate cel care vrea să arate că matematica nu este logică? El vrea să spună ceva de genul: dacă înfăşurăm mese, scaune, dulapuri etc. în destulă hârtie ele vor arăta, în cele din urmă, în mod sigur drept sferice.”[21] Fiecare demonstraţie matematică stabileşte

[17] Vezi *ibidem*, pp. 37–38.
[18] Vezi *ibidem*, p. 179.
[19] *Ibidem*, pp. 178–179.
[20] *Ibidem*, p. 162.
[21] *Ibidem*, p. 185.

un nou raport. Ea are, prin urmare, o utilitate pe care nu o are alta. Lui Wittgenstein fiecare demonstrație îi apărea drept o existență matematică care nu poate fi înlocuită cu alta. Or, derivările din logică amenință să slăbească conştiința particularităților sistemelor şi demonstrațiilor matematice[22]. Tema revine, tot timpul, în însemnările lui Wittgenstein, uneori prin comparații cu mare forță de sugestie. Ceea ce se urmăreşte să se arate este că derivări cum sunt cele propuse în *Principia Mathematica* nu numai că nu oferă nimic celui ce lucrează în matematică, dar sunt, prin obiectivele urmărite, cu totul străine de interesele şi preocupările acestuia. Cu referire la încercările de a face din logică „fundamentul matematicii”, Wittgenstein observa: „Dacă am fi conduşi să încercăm asta, bunăoară din considerații estetice, cine spune că vom reuşi? (Cine spune că acest poem englezesc va putea fi tradus în mod satisfăcător în limba germană?! Chiar *dacă* este de asemenea clar că, într-un anumit sens, există o traducere în germană a fiecare propoziții englezeşti?)”[23].

Spre deosebire de Russell, Wittgenstein nu era convins că siguranța demonstrativă a logicii este superioară celei proprii sistemelor matematicii. El revine în mod repetat asupra observației că certitudinea logică a demonstrațiilor „nu merge mai departe decât siguranța lor gramaticală”. Deosebirea dintre demonstrațiile logice şi cele geometrice sau aritmetice este mai degrabă deosebirea dintre demonstrații foarte lungi şi demonstrații mai scurte. În consecință, a ne dispensa de „demonstrații logice în matematică” înseamnă, până la urmă, doar a ne dispensa de demonstrații lungi. În cuvintele lui Wittgenstein: „«Cu ajutorul unor definiții corespunzătoare, putem demonstra $25 \times 25 = 625$ în logica lui Russell» – Şi pot eu explica tehnica obişnuită a demonstrației prin cea a lui Russell? Dar cum poate fi *explicată* o tehnică a demonstrației prin alta? Cum poate una să explice natura celeilalte? Căci dacă una este o «prescurtare» a celeilalte, atunci ea trebuie să fie o prescurtare *sistematică*. Este nevoie totuşi de o demonstrație că eu pot să prescurtez în mod sistematic demonstrațiile lungi şi să obțin, prin urmare, din nou un sistem de demonstrații. Demonstrațiile lungi merg, mai întâi, întotdeauna cu cele scurte şi le tutelează oarecum. Dar, în cele din urmă, ele nu le mai pot urma pe cele scurte, iar acestea îşi arată independența.”[24]

Oricum ar sta însă lucrurile din acest punct de vedere, Wittgenstein credea că valoarea sistemelor matematice trebuie apreciată în primul rând ținând seama de modul în care funcționează ele în aplicații, şi nu în funcție de modul în care satisfac cerințe ideale de siguranță demonstrativă şi de certitudine. Cum spuneam,

[22] Un punct de vedere departe de a fi unanim acceptat în rândul matematicienilor. În prefața unui volum ce reuneşte studii alese şi adunate sub titlul *Logica şi filozofie. Orientări în logica modernă şi fundamentele matematicii*, volum care a apărut în anul 1966, Grigore Moisil scria: „Matematica este, fără îndoială, o ştiință deductiv formală şi axiomatizată”.

[23] *Ibidem*, pp. 217–218.

[24] *Ibidem*, pp. 175–176.

Wittgenstein ne propune să privim matematica din perspectiva „istoriei naturale a omului”. Din această perspectivă, descoperirea unor contradicții în edificiul matematicii, ca şi posibilitatea de a construi paradoxuri, nu era receptată de Wittgenstein drept o gravă ameninţare, aşa cum au resimţit-o Frege sau Russell. Iată un pasaj pe deplin concludent din acest punct de vedere, din partea finală a însemnărilor lui Wittgenstein despre fundamentele matematicii: „Ce gen de siguranţă este aceasta dacă se bazează pe faptul că îndeobşte băncile nu *vor fi*, de fapt, luate cu asalt deodată de către toţi clienţii lor, chiar dacă ele ar da faliment dacă s-ar întâmpla aşa ceva?! Acum asta este un alt gen de siguranţă decât aceea mai primitivă; dar este, totuşi, o siguranţă. Sunt de părere că dacă ar fi găsită într-adevăr o contradicţie în aritmetică, aceasta ar proba că o aritmetică cu o *asemenea* contradicţie ar putea aduce servicii foarte bune; şi va fi mai bine dacă noi ne vom modifica conceptul nostru al siguranţei necesare decât să spunem că aceasta nu ar fi o aritmetică autentică.”[25] Asemenea pasaje ne arată deosebit de limpede că judecata lui Wittgenstein privitoare la fundamentele matematicii se sprijinea pe o anumită înţelegere a valorii ştiinţei, o înţelegere foarte diferită de cea care a inspirat programul lui Russell.

Un loc important în discuţia lui Wittgenstein a programului lui Russell îl ocupă critica definiţiei pe care a dat-o acesta numărului. Punctul de plecare al acestei definiţii l-a reprezentat, la Russell, ideea că numărul unei colecţii este clasa tuturor colecţiilor egale din punctul de vedere al numărului lor. Problema lui Russell a fost de a determina, fără circularitate, când au două clase acelaşi număr. În acest scop, Russell a făcut apel la relaţia de corespondenţă biunivocă unu – unu. O relaţie dintre doi termeni, x şi y, este o relaţie unu – unu dacă niciun alt termen în afară de x nu este corelat cu y, iar x este corelat în acest mod doar cu y. Două clase au acelaşi număr de elemente dacă şi numai dacă fiecare element al uneia va putea fi corelat unu – unu cu un element al celeilalte.

Wittgenstein a făcut o serie de observaţii asupra acestei definiţii în lecţiile pe care le-a ţinut la Cambridge, în 1935. Pentru Russell, spunea Wittgenstein, numărul este proprietatea unei clase. Iar o clasă are un anumit număr dacă membrii ei pot fi corelaţi unu – unu cu un prototip sau cu o paradigmă a acelui număr, de exemplu degetele unei mâini pentru numărul cinci. Este ca şi cum membrii acestei clase ar fi legaţi prin nişte sfori de membrii paradigmei. Posibilitatea de a fi corelaţi în acest mod este ca un fir subţire care leagă membrii celor două grupuri. Iar acest fir subţire ar trebui să fie deosebit de un fir mai gros, care reprezintă corelaţia reală. Corelaţia lui Russell este, aşadar, o corelaţie posibilă. Russell spune că cele două grupuri sunt corelate, deşi între ele nu există o corelaţie fizică. Membrii grupului care au acelaşi număr ar fi unite prin nişte linii pe care Wittgenstein le numeşte

[25] *Ibidem*, p. 401.

„eterice”. Relația acestora cu liniile reale seamănă cu relația care există între liniile euclidiene – linii cu o singură dimensiune – şi liniile reale. Se poate pune întrebarea cum se ştie că există o asemenea corelație unu – unu între membrii a două grupuri de obiecte. Răspunsul este că asta nu se poate şti şi, în consecință, nu se poate şti că ele au acelaşi număr[26]. Pentru a şti că două clase au acelaşi număr, va trebui să fie stabiliă o corelație reală între membrii acestora. Dacă enunțul că numărul clasei A este egal cu numărul clasei B nu înseamnă nimic altceva decât că are sens să se spună că există o corelație unu – unu între membrii acestor clase, atunci afirmarea egalității numerice este o afirmație de acelaşi gen cu o propoziție a gramaticii. Ea nu spune nimic despre realitate. Nu se spune că există o corelație, ci, mai degrabă, că are sens să se spună că există o corelație. Are sens să se spună că este posibil să se tragă o linie între două puncte. *Posibil* înseamnă aici *posibil din punct de vedere logic*[27]. Ceea ce este posibil din punct de vedere logic depinde de simbolismul pe care îl folosim. Iar folosirea unui simbolism anumit se justifică prin utilitatea lui. Wittgenstein formulează astfel concluzia analizei sale: „Explicația lui Russell pentru expresia *a avea acelaşi număr* creează impresia că implică o corelație, o corelație a claselor printr-o relație eterică. Această relație este, de fapt, o himeră, iar a spune că clasele sunt corelate în acest mod nu ne duce mai departe decât a spune că ele au acelaşi număr. Nu putem descoperi corelația logică în nici un alt mod decât descoperind că au acelaşi număr. Dacă suntem întrebați care este criteriul fundamental pentru posibilitatea unei corelații unu – unu, răspunsul este că cele corelate au acelaşi număr! Definiția dată de Russell este inutilă.”[28]

De ce credem însă că este necesară o definiție a numărului? Era firesc ca Wittgenstein să-şi pună această întrebare. Spre deosebire de Russell, el nu credea că logica şi matematica sunt două domenii diferite, primul mai fundamental decât al doilea. Nu credea, prin urmare, că prin definirea numărului ceva mai puțin fundamental ar fi redus la ceva mai fundamental. Convingerea că definițiile sunt întotdeauna importante şi aspirația de a găsi definiții par să decurgă din presupunerea că anumite substantive desemnează ceva anume, ceva care este în afara

[26] Vezi *Wittgenstein's Lectures*, pp. 157–158.

[27] Într-un alt pasaj, Wittgenstein exprimă astfel ceea ce el apreciază ca fiind „cea mai gravă dificultate” a definiției date de Russell numărului: „Trebuie noi oare să spunem că avem 4 scaune dacă ele *sunt* corelate unu – unu cu clasă paradigmă sau dacă ele pot fi corelate unu – unu? Nu există vreun motiv pentru care un grup oarecare trebuie să fie corelat în mod material cu oricare altul. Dar dacă ele nu sunt corelate în mod material, atunci Russell şi Frege doresc să spună că ele sunt corelate într-un oarecare mod eteric. Dacă corelația este o linie desenată, noi simțim că înaintea corelației a fost posibilitatea, ca o linie foarte subțire, care este trasată puternic când se desenează sau ca o poezie murmurată rapid atunci când suntem întrebați dacă o ştim pe de rost, care este apoi trasată în linii puternice atunci când este recitată. Posibilitatea corelației pare să fie un gen de corelație.” (*Op. cit.*, pp. 361–362).

[28] *Ibidem*, p. 163.

noastră sau în mintea noastră. Inițial putem fi mulțumiți să răspundem la întrebarea ce este un anumit substantiv, de exemplu un scaun, arătând spre ceva. Năzuința de a găsi o definiție tinde însă să devină deosebit de puternică ori de câte ori o asemenea indicație se dovedeşte a fi nesatisfăcătoare. Astfel, celor care răspund la întrebarea ce este un anumit număr, arătându-ne spre un anumit semn, li se poate replica că despre semne se pot spune lucruri care nu se pot spune despre numere, iar de aici se trage concluzia că este altceva decât un semn şi întrebarea ce este el, năzuința de a da o definiție, devin presante. În acelaşi fel s-a ajuns, observa Wittgenstein, şi la întrebarea „Ce este timpul?” După ce s-a constatat că indicarea mişcării corpurilor cereşti nu reprezintă întotdeauna un răspuns satisfăcător la această întrebare, că se pot face despre timp afirmații care nu se referă la mişcarea corpurilor cereşti, nevoia unei definiții a timpului a apărut drept tot mai urgentă. În cazul numărului, ca şi în cazul timpului, suntem tentați să presupunem că termenii stau pentru o realitate monolitică. Că diversele utilizări ale acestor termeni vor trebui să fie explicate prin raportare la o asemenea realitate, adică la timpul în genere sau la numărul în genere. Dacă ne eliberăm de fascinația pe care o exercită această presupunere, atunci vom fi în măsură să vedem „ceea ce stă deschis în fața ochilor noştri”, şi anume că există o mare diversitate de folosiri ai unor termeni ca numărul sau timpul şi că între aceste folosiri există doar unele asemănări. La fel ca şi între membrii aceleaşi familii. „Presupuneți că întreb dacă cuvântul «7» este lipsit de sens în propoziția «Există 7 oameni în încăpere». Deşi nu stă pentru ceva spre care se poate arăta, oricine va răspunde că el (cuvântul «7» – n.m. M.F.) nu este lipsit de sens, nu este inutil. El are o funcție în propoziție… Deşi «funcția unui cuvânt» nu este o definiție a «semnificației unui cuvânt», este întotdeauna folositor să înlocuim «semnificație» cu «funcție».”[29] Este adesea practic să definim un termen prin raportare la alți termeni, iar atunci când ni se cere definirea acestor termeni să ne referim pur şi simplu la modul cum sunt ei folosiți[30].

Concluzia lui Wittgenstein este că preocuparea de a defini numărul în genere decurge dintr-o neînțelegere. Nu avem nevoie de o definiție a numărului mai mult decât de o definiție a regelui în şah. În şah, tot ceea ce ne interesează este cum putem folosi această piesă şi tot aşa ceea ce ne interesează sunt variatele folosiri ale cuvântului *număr* şi ale numeralelor. Întrebarea „Ce este un număr?” nu trebuie să primească un răspuns. Ea poate să fie înlăturată. Împotriva pornirii noastre de a întreba ce este numărul, Wittgenstein ne îndeamnă prin urmare să ne întrebăm cum este folosit, de fiecare dată, acest cuvânt. „Putem înlătura încurcătura pe care o generează această întrebare într-un alt mod: obținând claritate cu privire la

[29] *Ibidem*, p. 151.

[30] „Presupuneți că dau «1+1+1=3» drept definiția lui «3» şi că sunt întrebat «Ce este 1 şi ce este +?». Răspunsul este că pot să dau *folosirea* lor, gramatica lor (p. 52).

gramatica cuvântului «număr» şi a numeralelor. Nu cereţi o definiţie; obţineţi claritate cu privire la gramatică! Obţinând claritate asupra folosirii cuvântului număr, noi vom înceta să punem întrebarea «Ce este numărul?».”[31]

Dacă ne vom întreba ce gen de critică este critica făcută de Wittgenstein definiţiei dată de Russell numărului, răspunsul ar putea să fie următorul. Arătând că definiţia lui Russell nu realizează obiectivul pe care l-a avut în vedere, critica lui Wittgenstein este o critică internă; arătând însă că o definiţie a numărului este tot atât de puţin necesară ca şi o definiţie a timpului, această critică este o critică externă, o critică ce decurge dintr-un mod diferit de a privi limbajul în raport cu cel al lui Russell; în particular, dintr-o înţelegere diferită a ceea ce este semnificaţia unei expresii a limbajului. Acelei practici a filosofiei care porneşte de la conceperea ei drept un efort de a dezvălui o unitate superioară, dincolo de diversitate, Wittgenstein îi opune practicarea filosofiei drept o străduinţă persistentă, niciodată încheiată, de a câştiga o privire cât mai clară asupra diversităţii. Reflecţiile lui Wittgenstein asupra programului lui Russell din *Principia Mathematica* reprezintă una dintre acele prestaţii care ne oferă posibilitatea să înţelegem mai bine sensul observaţiei sale că „filosofia aşază, pur şi simplu, totul în faţa ochilor noştri şi nu explică, nu deduce nimic”. Afirmând în paragraful 124 al *Cercetărilor filosofice* că filosofia „lasă totul aşa cum este”, Wittgenstein adaugă: „Ea lasă matematica aşa cum este şi nici o descoperire matematică nu o poate face să înainteze. O «problemă centrală a logicii matematicii» este pentru noi o problemă a matematicii, ca şi oricare alta.” Aceasta este o referire destul de transparentă la filosofia matematicii a lui Bertrand Russell.

[31] *Ibidem*, p. 164.