JAN ŁUKASIEWICZ

LOGICA
ŞI
PROBLEMA FUNDAMENTELOR MATEMATICII

1. Calculul propoziţional este o disciplină logică fundamentală. Alte discipline logice, în particular calculul funcţional, sunt construite pe baza calculului propoziţional, iar matematica, la rândul ei, este în întregime bazată pe logică. În felul acesta, calculul propoziţional este cel mai adânc fundament al tuturor ştiinţelor deductive. Prezenta lucrare este dedicată acestui calcul fundamental şi importanţei sale pentru matematică.

2. Logica propoziţională a fost mereu neglijată. Necunoscută lui Aristotel, ea a fost iniţiată numai de stoici. Însă logica stoică a propoziţiilor, în antichitate, ca şi în Evul Mediu şi în timpurile moderne, a fost întotdeauna estompată de silogistica aristotelică. Opera lui Frege, strălucitul logician german, care în 1879 a creat calculul propoziţional într-o formă aproape completă, nu s-a bucurat la început de nici o atenţie. Abia după 1910, când Russell şi Whitehead în lucrarea lor fundamentală *Principia Mathematica* au aşezat calculul propoziţional în fruntea logicii matematice a fost realizată importanţa capitală pe care această disciplină o are pentru ştiinţele matematice.

3. Chiar şi în zilele noastre mulţi matematicieni par să ştie destul de puţin despre calculul propoziţional. Ca şi Aristotel, ei folosesc total intuitiv unele dintre cele mai simple reguli de inferenţă ale acestei logici fără să bănuiască cât de bogată este ea în teoreme şi ce tezaur de probleme oferă. Pentru a-l familiariza pe cititor cu aceste probleme mă voi referi la două dintre regulile de inferenţă folosite în mod obişnuit de matematicieni.

4. Presupunând că sunt date următoarele două premise: „Dacă *p*, atunci *q*” şi „dacă *q*, atunci *r*”, putem trage concluzia: „dacă *p*, atunci *r*”. În simboluri (unde *C* stă pentru „dacă... atunci”):

$$
\begin{array}{ll}
Cpq & P_1 \\
\underline{Cqr} & P_2 \\
Cpr & S
\end{array}
$$

Rev. filos., **LXIV**, *2*, p. 289–304, Bucureşti, 2017

Dacă prima premisă este notată cu P_1, a doua cu P_2, şi concluzia cu S, următoarea formulă va fi evident validă:

1) $$CP_1CP_2S$$

Aceasta înseamnă: „dacă P_1, atunci, dacă P_2 atunci S". În această formulă înlocuim literele P_1, P_2 şi S cu expresiile pe care le reprezintă şi obţinem următoarea teză a calculului propoziţional:

2) $$CCpqCCqr\ Cpr$$

În cuvinte: „dacă (dacă *p*, atunci *q*), atunci (dacă (dacă *q*, atunci *r*), atunci (dacă *p*, atunci *r*))". Aceasta este legea silogismului ipotetic, cea mai cunoscută formă a inferenţei directe[1].

5. O altă regulă de inferenţă foarte comună este inferenţa indirectă. O propoziţie *p* este demonstrată indirect dacă luăm ca punct de plecare în demonstraţie negaţia ei *Np* (unde *N* stă pentru „non") şi deducem din *Np* propoziţia *q*, cunoscută ca falsă. Din aceasta se deduce că *Np* trebuie să fie falsă, şi deci *p* adevărată. Inferenţa indirectă are, aşadar, forma

$$\begin{array}{ll} CNpq & P_1 \\ \underline{Nq\ \ldots} & P_2 \\ p & S \end{array}$$

Dacă formula 1) este aplicată acestei forme de inferenţă se obţine o altă teză a calculului propoziţional:

3) $$CCNpqCNqp$$

În cuvinte: „dacă (dacă non-*p* atunci *q*), atunci (dacă non-*q*, atunci *p*)", care este o formă a legii transpoziţiei.

6. Această ultimă formă de inferenţă este contestată de profesorul Brouwer, eminentul matematician, din cauza faptului că poate fi folosită în demonstraţia existenţei numerelor ce nu pot fi date efectiv, adică prin construcţie. De exemplu, existenţa numerelor pare şi totodată prime este demonstrată efectiv pe baza următoarei legi a calculului funcţional:

4) $$CFa\Sigma xFx.$$

[1] Exprimarea în limbajul natural a acestor teze elementare este total neintuitivă. În citirea lor îl putem combina pe „dacă..., atunci..." cu „implică" având în vedere că ambele expresii redau implicaţia materială. În cazul de faţă, păstrând parantezele, obţinem: „dacă (*p* implică *q*), atunci, ((dacă *q* implică *r*), atunci (*p* implică *r*))." (n. trad.)

În cuvinte: „dacă *F* de *a*, atunci exstă un *x* astfel că *F* de *x*”. Acum, dacă *Fx* stă pentru „*x* este un număr par prim”, şi dacă în 4) numărul 2 este substituit pentru *a*, se ajunge la următorul proces deductiv:

(1) $CF2\ \Sigma xFx$
(2) $F2$
  (1) = C(2)(3)
(3) ΣxFx

În exprimare liberă: *a*) Dacă 2 este un număr par prim, atunci există numere pare prime; *b*) 2 este un număr par prim; deci *c*) există numere pare prime.

7. Propoziţia existenţială ΣxFx poate fi demonstrată şi indirect. Dacă negaţia acestei propoziţii, respectiv $N\Sigma xFx$, este luată ca punct de plecare în demonstraţie, şi o propoziţie falsă *a* se deduce din această negaţie, în baza tezei 3) se ajunge la propoziţia existenţială. Procesul de deducţie este următorul:

(1) $CCNpqCNqp$
(2) $CN\Sigma xFxa$
(3) Na
  (1) $p/\Sigma xFx$, q/a = (4)
(4) $CCN\Sigma xFxaCNa\Sigma xFx$
  (4) = C(2)(5)
(5) $CNa\ \Sigma xFx$
  (5) = C(3)(6)
(6) ΣxFx

Se presupune că (2) şi (3) sunt premise adevărate; (4) este obţinută prin substituţie din (1), şi tot din (4) se obţine, prin dublă detaşare, propoziţia existenţială (6).

8. Adepţii logicii intuiţioniste nu acceptă validitatea unei propoziţii existenţiale obţinută în acest fel, adică neefectiv. În consecinţă, ei resping legea transpoziţiei *CCNpqCNqp*. Sunt şi alte asemnea teze ale logicii propoziţiilor pe care intuiţioniştii nu le consideră universal valide. Printre tezele invalidate de ei se numără şi o altă formă a legii transpoziţiei *CCNpNqCpq*, legea dublei negaţii cu negaţia în antecedent *CNNpp*, dar mai ales legea terţului exclus *ApNp* („*A*” este simbolul alternării „sau”; „*ApNp* se citeşte „*p* sau non-*p*”). Pe de altă parte, sunt valide cele două legi rămase ale transpoziţiei *CCpqCNqNp* şi *CCpNqCqNp*, legea dublei negaţii cu negaţia în consecvent *CpNNp*, şi legea contradicţiei excluse *NKpNp* („*K*” este simbolul conjuncţiei „şi”; „*NKpNp*” se citeşte „ nu împreună *p* şi non-*p*)”. Problema este cât se poate de serioasă, ea priveşte cea mai simplă şi mai fundamentală disciplină logică; o veritabilă controversă în problema fundamentelor.

9. Calculul propozițional nu este o îngrăgrămădire de pietre care să rămână grămadă şi după ce se iau unele pietre din ea. El este mai degrabă un mecanism de mare precizie ce se defectează fie şi prin scoaterea unei singure rotițe, şi care apoi se cere reconstruit. Îi suntem recunoscători de aceea lui Heyting pentru faptul de-a fi reuşit, în 1930, să formalizeze calculul propozițional în spiritul intuiționismului. El a reuşit să construiască un sistem de axiome pentru calculul propozițional intuiționist. Nu voi discuta aceste axiome aici, în schimb, voi prezenta un rezultat pe care l-am obținut în luna mai a acestui an urmând o sugestie a respectabilului meu prieten, profesorul Scholz din Münster, rezultat ce va face mai simplă comparația logicii clasice a propozițiilor cu logica intuiționistă.

10. Următorul sistem independent de axiome, compus din patru grupe de axiome, este suficient calculului propozițional clasic:

I	1	*CpCqp*
	2	*CCpCpqCpq*
	3	*CCpqCCqrCpr*
II	4	*CKpqp*
	5	*CKpqq*
	6	*CCpqCCprCpKqr*
III	7	*CpApq*
	8	*CqApq*
	9	*CCprCCqrCApqr*
IV	10	*CCpNqCqNp*
	11	*CNpCpq*
	12	*CCCpNpqCCpqq*

Axiomele grupului I conțin numai simbolul implicației „*C*”. Ele caracterizează ceea ce se cheamă „logica pozitivă”, în sensul profesorului Bernays. Axiomele grupului II conțin şi simbolul conjuncției „*K*”, iar cele ale grupului III simbolul alternării „*A*”. Axiomele primelor trei grupuri au fost formulate de profesorul Bernays. Axiomele grupului IV aparțin negației „*N*”. Sistemul include şi două reguli de inferență: regula substituției, cea care ne permite să substituim în locul variabilelor orice expresie cu sens[2], şi regula detaşării, care stabileşte că din expresiile $C\alpha\beta$ şi α putem întotdeauna deduce β.

11. Aşa cum am mai spus, sistemul celor 12 axiome este valid pentru calculul propozițional clasic, sau obişnuit. Dacă axioma 12 este eliminată obținem un sistem de axiome pentru logica intuiționistă echivalent sistemului formulat de Heyting cu

[2] Pentru evitarea unor confuzii, sintagma *significant expression* a fost tradusă uneori prin *expresie bine formată* (n. trad.).

toate regulile lui de inferență. Dacă se elimină axiomele 11 şi 12 obținem ceea ce se cheamă calculul minimal al lui Johannsson. Relația dintre logica propozițională clasică şi logica intuiționistă este acum clară: logica propozițională intuiționistă acoperă o parte proprie, strict limitată, a tezelor calculului propozițional clasic, şi este, în consecință, esențial mai slabă decât acesta[3]. Este de datoria matematicienilor să afle ce poate fi construit pe o asemenea bază atenuată a matematicii. Cercetările deja realizate, ca şi cele în curs, pot fi la fel de fertile şi importante pentru problema fundamentelor logicii ca şi cercetările inițiate de respectabilul meu coleg din Varşovia, profesorul Sierpiński, pe tema axiomei alegerii a lui Zermelo şi a rolului său în teoria mulțimilor şi în analiză.

12. Nu voi intra aici în problema dacă este justificată respingerea anumitor forme de inferență din calculul propozițional clasic. Pentru mine un lucru este clar: această controversă nu poate fi clarificată acum, nici pentru logică, nici pentru matematică. Argumentele filosofice venite din diferitele direcții sunt, după părerea mea, neconclusive. Problema trebuie studiată mult mai temeinic. Voi încerca să fac acest lucru, cu toate că realizez cât de dificil este să explorezi adâncimile. În această privință pot menționa patru aspecte ce vor servi ca repere: a) existența matricilor în logica propozițiilor, b) o matrice adecvată corespunde fiecărui sistem de logică propozițională, c) matricile logicilor propoziționale polivalente pot fi şi ele interpretate intuitiv, d) în cazul matricilor interpretate intuitiv, toate funcțiile logice posibile relativ la respectivele matrici trebuie luate în considerare.

13. Metoda matricilor a fost inventată în 1885 de către eminentul logician american Charles Peirce. În logica propozițiilor, adevărul tezelor nu depinde de conținutul lor ci de valoarea lor de adevăr. În calculcululul propozițional clasic există două valori de adevăr – adevărul şi falsul. Dacă adevărul este reprezentat prin „1” şi falsul prin „2” pot fi date următoarele ecuații:

Negația	*Implicația*	*Conjuncția*	*Alternarea*
$N1 = 2$	$C11 = 1$	$K11 = 1$	$A11 = 1$
$N2 = 1$	$C12 = 2$	$K12 = 2$	$A12 = 1$
	$C21 = 1$	$K21 = 2$	$A21 = 1$
	$C22 = 1$	$K22 = 2$	$A22 = 2$

Toate aceste ecuații pot fi reprezentate mai simplu sub forma unor tabele (în cazul funcțiilor de două argumente, primul argument este scris în coloana din stânga, iar al doilea, în rândul de deasupra):

[3] În studiul său din 1952, *On the Intuitionistic Theory of Deduction*, Łukasiewicz revine asupra acestei idei încercând să arate că logica intuiționistă nu numai că nu este mai slabă decât logica propozițională clasică, dar este chiar mai tare şi mai bogată decât aceasta (n. trad.).

N	
1	2
2	1

C	1	2
1	1	2
2	1	1

K	1	2
1	1	2
2	2	2

A	1	2
1	1	2
2	1	1

Ele sunt numite matricea pentru *N*, *C*, *K* şi *A*[4]. Fiecare matrice are cel puţin o valoare selectată; în cazul de faţă valoarea selectată este adevărul, adică 1.

14. Fiecărei matrici îi este asociată o metodă de verificare. Spunem că o expresie a calculului propoziţional satisface o matrice dacă pentru toate evaluarile variabilelor sale prin valorile incluse în matrice, expresia ia valoarea selectată după efectuarea reducerilor. De exemplu, teza *CCCpNpqCCpqq* satisface matricea de mai sus întrucât obţinem:

pentru $p/1$, $q/1$: $CCC1N11CC111 = CCC121C11 = CC211 = C11 = 1$,
pentru $p/1$, $q/2$: $CCC1N12CC122 = CCC122C22 = CC221 = C11 = 1$,
pentru $p/2$, $q/1$: $CCC2N21CC211 = CCC211C11 = CC111 = C11 = 1$,
pentru $p/2$, $q/2$: $CCC2N22CC222 = CCC212C11 = CC122 = C22 = 1$.

Toate matricele sunt ereditare relativ la regula substituţiei, aceasta însemnând că dacă o expresie satisface o matrice, respectiva matrice este de asemenea satisfăcută de toate substituţiile acestei expresii. Pentru ca o matrice să fie ereditară relativ la regula detaşării este suficient, deşi nenecesar, ca funcţia de două argumente $F\alpha\beta$, căreia i se aplică regula detaşării (în mod obişnuit ea este implicaţia), să aibe valoarea selectată pentru selectarea lui α, dacă β este de asemenea selectată. Astfel, $C1\beta$ este egală cu 1 numai dacă β este de aemenea egală cu 1. O astfel de matrice este numită normală de către colegul meu din Varşovia, Tarski. Toate matricele normale sunt ereditare relativ la regula detaşării; de aceea, dacă o matrice este satisfăcută de $F\alpha\beta$ şi de α, atunci ea trebuie să fie satisfăcută şi de β.

15. Metoda matricelor a fost folosită mai întâi pentru verificarea tezelor calculului propoziţional clasic[5]. Însă curând s-a constatat că metoda are o importanţă incomparabil mai mare. Ea face posibile demonstraţiile de independenţă în domeniul logicii propoziţiilor, fapt necunoscut lui Frege şi Russell. Meritul de-a fi arătat cum poate fi folosită metoda matricelor în demonstraţiile de independenţă îi revine lui Bernays. Mie mi-a fost cunoscută această metodă înaintea publicării ei

[4] Aici, ca şi în alte părţi, autorul vorbeşte de matrice la singular, prin care înţelege toate cele patru tabele. În literatura românească matricea are alt înţeles, fiecare tabel în parte este o matrice, de aceea am preferat uneori traducerea termenului *matrix* prin plularul *matrici* şi nu prin singularul *matrice* (n. trad.).

[5] Autorul nu face o deosebire foarte clară între noţiunea de *calcul propoziţional* şi de *logică propoziţională*. Conform terminologiei actuale, *calculul propoziţional* este *sistemul formal* de logică propoziţională (n. trad.).

de către Bernays. Ideea acestor demonstrații de independență poate fi cel mai bine explicată printr-un exemplu. În sistemul de axiome dat mai sus, pentru a demonstra că axioma 12 este independentă de restul axiomelor este suficient a găsi o proprietate care să fie ereditară relativ la regulile de inferență şi să fie caracteristică tuturor axiomelor, cu excepția axiomei 12. Dacă o axiomă satisface o matrice normală, aceasta este o proprietate corespunzătoare a axiomei şi este ereditară relativ la regulile substituției şi detaşării. Construim în continuare următoarea matrice trivalentă pentru *N*, *C*, *K*, şi *A*:

N	
1	3
2	3
3	1

C	1	2	3
1	1	2	3
2	1	1	3
3	1	1	1

K	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

A	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

Din nou, 1 este valoarea desemnată. Această matrice este normală întrucât $C1\beta$ este 1 numai dacă β este 1. Este uşor de arătat că matricea este satisfăcută de primele unsprezece axiome; altfel spus, pentru toate valorile funcțiilor[6] a căror variabile iau valorile 1, 2, sau 3, respectivele axiome, conform matricii, iau după reducere valoarea 1. Numai axioma 12 nu satisface matricea întrucât, pentru *p*/2 şi *q*/2, obținem:

$$CCC2N22CC222 = CCC232C12 = CC322 = C12 = 2$$

16. Aceata rezolvă prima din cele patru probleme ridicate mai sus. Sunt matrici în logica propozițiilor şi acestea joacă un rol important în calculul propozițional. Trec acum la cea de-a doua problemă. Cercetările metalogice intreprinse de Tarski ne permit să dăm o definiție exactă concepului de sistem al logicii propoziționale. Prin sistem al logicii propoziționale înțeleg o mulțime de expresii bine formate ale logicii propozițiilor, închisă relativ la regulile de deducție. Ca reguli de deducție am în vedere în primul rând regula substituției şi detaşării. Urmează că orice expresie cu sens, de exemplu

CCppp şi *CCCpqqCCqpp*,

împreună cu toate consecințele derivate din ele prin intermediul regulilor de deducție specificate, constituie un sistem de logică propozițională. Este deci clar că fiecare matrice normală defineşte un sistem de logică propozițională. În mod destul de surprinzător, conversa enunțului este de asemenea validă: Lindenbaum, unul dintre colegii mei din Varşovia, a demonstrat că pentru fiecare sistem logic propozițional există o matrice normală adecvată cu o mulțime cel mult numărabilă

[6] Adică funcțiilor de adevăr (n. trad.).

de valori. O matrice este numită adecvată relativ la un sistem dacă este satisfăcută de toate expresiile sistemului şi numai de ele. Această importantă teoremă a fost publicată, fără demonstraţie, în 1930, în lucrarea *Untersuchungen über den Aussagen Kalkül*, scrisă de mine împreună cu Tarski.

17. Vreau, în continuare, să deduc unele consecinţe din această teoremă. Înainte, însă, este evident că toate sistemele axiomatice ale calculului propoziţional sunt sisteme ale logicii propoziţiilor în sensul definiţiei lui Tarski. Conform teoremei lui Lindenbaum, orice astfel de sistem trebuie să aibe o matrice normală adecvată. Pentru calculul axiomatic clasic, matricea normală bivalentă dată la început este adecvată – aşa cum s-a demonstrat adeseori, această matrice este satisfăcută de toate tezele calculului propoziţional clasic, şi numai de ele. Acesta este motivul pentru care calculul propoziţional clasic este numit bivalent. Pentru orice sistem mai slab, adică pentru orice sistem în care anumite teze ale calculului bivalent nu sunt valide, matricea adecvată nu mai este bivalentă, ci polivalentă (în orig. *many-valued*). Calculul axiomatic intuiţionist al lui Heyting este un astfel de sistem. Acest calcul trebuie să aibe, prin urmare, o matrice adecvată polivalentă. De fapt, Gödel a demonstrat că pentru sistemul lui Heyting nu există nici o matrice normală adecvată cu un număr finit de valori. Acelaşi rezultat a fost obţinut, în mod independent şi de Jaśkowski, unul dintre primii mei discipoli din Varşovia, care a construit pentru logica propoziţională intuiţionistă matrici cu un număr infinit de valori.

18. Nu mă pot angaja aici într-o discuţie mai detaliată privind complicata problemă a matricilor adecvate pentru calculul propoziţional intuiţionist. Pentru scopul urmărit de mine este suficient să aleg un exemplu simplu. Am dat mai sus exemplul unei matrici normale trivalente satisfacută de primele unsprezece axiome ale sistemului de axiome pe care eu l-am construit. Aceste unsprezece axiome reprezintă calculul propoziţional intuiţionist. Însă matricea invocată, care, în paranteză fie spus, i se datorează lui Heyting, nu este adecvată calculului intuiţionist întrucât ea este satisfacută nu numai de tezele acestui calcul, ci şi de alte teze ce nu aparţin calculului intuiţionist. Prin urmare, matricea defineşte un sistem mai puternic. Eu am reuşit să axiomatizez acest sistem mai puternic.

19. Dacă la sistemul de axiome citat la punctul 10, axioma 12 este înlocuită cu axioma 12a, respectiv:

12a *CCNpqCCCqpqq*

atunci axiomele 1–11 şi 12a formează un sistem independent pentru care matricea normală trivalentă construită de Heyting şi citată la punctul 15 este adecvată. Pe de-o parte, axioma 12a nu este deductibilă din axiomele calculului intuţionist, ceea ce poate fi demonstrat cu ajutorul unor matrici tetravalente, iar pe de altă parte, axioma satisface matricea trivalentă dată de Heyting. Astfel, dacă o luăm împreună cu restul axiomelor, ea nu este suficientă să formeze fundamentul calculului bivalent. Avem astfel un exemplu simplu de sistem al logicii propoziționale reprezentat prin axiome şi mai slab decât calculul propozițional clasic. Asemenea acestui calcul, el are o matrice normală adecvată, deşi ea nu este bivalentă, ci trivalentă. Pentru toate sistemele mai slabe decât calculul propozițional bivalent există matrici adecvate normale polivalente. Aceasta nu este incidental, aceasta este o lege. Şi această lege conferă o importanță capitală metodei matricelor. Am încheiat astfel şi discuția celei de-a doua dintre problemele ridicate.

20. Matricele pentru calculul propozițional bivalent au fost dezvoltate pe o bază intuitivă. Valorile acestor matrici au fost interpretate ca valori de adevăr: 1 ca adevăr şi 2 ca fals. Mai târziu însă, când metoda matricelor începe să fie folosită în demonstrațiile de independență şi când numeroase matrici polivalente au fost construite în acest scop, interesul pentru interpretarea intuitivă a valorilor matriceale s-a pierdut. Pur şi simplu nu a mai fost necesară interpretarea intuitivă a acelor valori. Matricele în cauză au servit scopului de-a găsi, pentru tezele date, proprietăți ereditare relativ la regulile de inferență. Valorile matriceale au fost reduse la statutul de constante fără semnificație (în orig. *meaningless constants*), iar formarea de matrici devine o procedură pur formală. Şi totuşi, în matricile polivalente încă este posibilă interpretarea intuitivă a valorilor. Ca prim exemplu voi cita matricea introduse de Heyting, discutată ceva mai devreme.

21. În lucrarea sa fundamentală despre regulile formale ale logicii intuiționiste, Heyting spune: „Grupa XII (matricea în chestiune, cu valorile redenumite) poate fi interpretată astfel: 2 stă pentru orice propoziție corectă, care nu poate fi falsă, dar a cărei corectitudine nu poate fi dovedită. Obținem atunci tabelul dat mai sus.” Urmează din explicația dată de autor că el credea, în baza anumitor idei, că în mod sigur ar putea construi respectiva matrice. Voi încerca să examinez mai îndeaproape aceste idei.

22. Dintre cele 30 de ecuații pe care le conține matricea, 14 sunt luate din calculul propozițional bivalent:

$N1 = 3$	$C11 = 1$	$K11 = 1$	$A11 = 1$
$N3 = 1$	$C13 = 3$	$K13 = 3$	$A13 = 1$
	$C31 = 1$	$K31 = 3$	$A31 = 1$
	$C33 = 1$	$K33 = 3$	$A33 = 3$,

în care 1 stă pentru adevăr şi 3 pentru fals. Alte 10 ecuații, pentru conjuncție şi alternare, sunt obținute în baza următoarelor considerente: noua valoare 2 este atribuită acelor propoziții care nu pot fi false, însă nu pot fi demonstrate. Această valoare este evident mai slabă decât adevărul, dar mai tare decât falsul. Mai departe, valoarea conjuncției este dată de valoarea celui mai slab dintre argumentele ei, iar valoarea alternării de valoarea celui mai puternic. Pentru aceleaşi valori ale argumentelor, valoarea fiecărei funcții este egală cu valoarea argumentelor. Obținem astfel următoarele ecuații:

$$\begin{array}{ll} K12 = 2 & A12 = 1 \\ K21 = 2 & A21 = 1 \\ K22 = 2 & A22 = 2 \\ K23 = 3 & A23 = 2 \\ K32 = 3 & A32 = 2 \end{array}$$

Alte două ecuații pentru implicație

$$C21 = 1 \quad \text{şi} \quad C32 = 1$$

sunt obținute pe baza regulii valide din calculul bivalent care stabileşte că implicația cu consecvent adevărat sau cu antecedent fals trebuie să fie adevărată indiferent de valoarea celuilalt argument. Cea de-a treia ecuație a implicației, respectiv

$$C22 = 1$$

rezultă din legea identității. Dificultăți pot fi doar în legătură cu valoarea expresiilor $C12$, $C23$ şi $N2$. $C12$ nu poate fi adevărată pentru că ar însemna ca 2 să desemneze adevărul. Ea nu poate fi nici falsă întrucât nu are consecvent fals. Ajungem astfel la

$$C12 = 2.$$

Pe de altă parte, $C23$ este evident falsă întrucât un antecedent ce nu poate fi fals nu poate avea un consecvent fals. Prin urmare

$$C23 = 3$$

Pentru ultima ecuație avem

$$N2 = 3$$

pentru că, în mod clar, negația unei propoziții ce nu poate fi falsă este falsă.

23. Am înțeles aceste lucruri mult mai uşor acum decât înainte de-a fi construit prima matrice trivalentă intuitivă, deşi atunci am fost ghidat de cu totul alte idei. Urmând celebrul exemplu al lui Aristotel, am ajuns la concluzia că propozițiile despre evenimente posibile viitoare nu sunt în prezent nici adevărate,

nici false. Riguros vorbind, enunţul că eu voi fi în Varşovia în după amiaza zilei de 8 decembrie 1939, nu poate fi astăzi nici adevărat, nici fals. Trebuie de aceea să avem o a treia valoare de adevăr. Această a treia valoare de adevăr este în aceeaşi relaţie cu posibilitatea ca şi adevărul cu fiinţa, respectiv, falsul cu nefiinţa. În baza acestor idei am construit, tot la începutul lui 1920, următoarele matrici trivalente:

N	
1	3
2	3
3	1

C	1	2	3
1	1	2	3
2	1	1	2
3	1	1	1

K	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

A	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

în care 1 este valoarea desemnată, adică adevărul, 3 stă pentru fals şi 2 pentru cea de-a treia valoare „posibilul”. Matricea este normală[7].

24. Comparaţia acestei matrici cu matricea lui Heyting este extrem de instructivă. Dat fiind că şi aici cea de-a treia valoare, posibilul, este mai slabă decât adevărul, dar mai tare decât falsul, aceleaşi ecuaţii sunt valabile pentru conjuncţie şi alternare. Există totuşi o diferenţă în ecuaţiile implicaţiei şi negaţiei, deşi numai în două puncte, corespunzător expresiilor *C*23 şi *N*2. Mai departe, *C*23 = 2 şi nu 3, ca la Heyting, întrucât posibilitatea se poate transforma fie în adevăr, fie în fals. În primul caz, *C*23 devine *C*33, care înseamnă adevărul, iar în al doilea *C*13, adică falsul. Din această cauză, *C*23 nu este nici adevărată, nici falsă, ea trebuie să aibe o a treia valoare. *N*2 de asemenea trebuie să aibe o a treia valoare întrucât este evident că propoziţia „Voi fi în Varşovia în după amiaza zilei de 8 decembrie 1938” nu poate fi nici adevărată, nici falsă, ci doar posibilă. La fel negaţia ei. Cele două exemple rezolvă şi cea de-a patra problemă ridicată – matricele polivalente pot fi şi ele interpretate intuitiv.

25. Există sisteme parţiale ale calculului propoziţional bivalent în care nu toate funcţiile (de adevăr – a. trad) ale acestui calcul pot fi definite. Sistemul implicaţional, de exemplu, în care implicaţia este singurul său termen, şi în care teza *CCCpqrCCrpCsp* este unica sa axiomă (cea mai scurtă teză din care toate celelalte teze implicaţionale rezultă), este un sistem parţial. Sistemele parţiale sunt incomplete şi, de aceea, imperfecte. În sistemul implicaţional invocat, nici negaţia, nici conjuncţia nu pot fi definite. Dacă vrem să avem un sistem logic utilizabil în toate ocaziile, va trebui să ne străduim să construim sisteme ale logicii propoziţionale în care funcţiile să fie definibile oricât de multe ar fi. În calculul propoziţional bivalent sunt $2^2 = 4$ funcţii posibile de un argument, şi $2^{2^2} = 16$ funcţii

[7] A se observa că în matricea disjuncţiei *A* (sau alternării, cf. autorului), *A*22 = 2, ceea ce nu corespunde interpretării lui Aristotel. Łukasiewicz nu ţine să menţioneze această limită a sistemului său, care nu este una minoră. (n. trad.)

posibile de două argumente. Chiar dacă nu toate aceste funcții pot fi folosite în inferențele practice, şi chiar dacă nu toate pot fi exprimate prin cuvinte în limbajul obişnuit, ele sunt totuşi definibile în sistemul bazat pe implicație şi negație. Acest sistem este, prin urmare, complet[8].

26. Ce se poate spune din acest punct de vedere despre sistemele polivalente? Pe măsură ce creşte aici numărul valorilor matriceale, creşte şi numărul funcțiilor posibile. Printr-o analiză combinatorică simplă aflăm că pentru o matrice n-valentă sunt n^n funcții posibile de un argument şi n^{n^2} funcții posibile de două argumente. Numărul creşte rapid. În sistemele trivalente numărul funcțiilor de un argument se ridică la $3^3 = 27$, iar cele de două argumente la $3^{3^2} = 3^9 = 19683$. În sistemele tetravalente sunt $4^4 = 256$, respectiv, $4^{4^2} = 4^{16} = 4\,294\,967296$ astfel de funcții, adică mai mult de patru mii de milioane. În matricele cu mulțimi numărabile de valori, mulțimea funcțiilor posibile este nenumărabilă[9].

27. Să revenim la exemplul nostru. În logica propozițională trivalentă, în special acolo unde valorile de adevăr pot fi interpretate intuitiv, putem cere ca toate funcțiile să fie definibile, la fel ca în calculul bivalent. Însă nu acesta e cazul sistemelor trivalente descrise mai sus. Se poate uşor arăta că funcția „*Tp*” (a se citi „a treia valoare de adevăr a lui *p*”) care ia constant valoarea 2 (adică $Tp = 2$) nu poate fi definită în niciun sistem. Prin urmare, ambele sisteme sunt incomplete. Calculul intuiționist este de asemenea incomplet; nu se poate vedea cum mulțimile infinite de valori ale matricelor sale pot fi interpretate intuitiv. Să încercăm să facem unul dintre sisteme complet. Dat fiind că cercetările privind sistemul bazat pe matricele lui Heyting nu sunt finalizate, sistemul trivalent construit de mine poate servi ca bază în următoarea analiză.

28. Vreau să arăt mai întâi că în calculul meu propozițional trivalent atât conjuncția cât şi alternarea sunt definibile. Cele două definiții sunt:

$$Apq = CCpqq \quad \text{şi} \quad Kpq = NANpNq.$$

(vreau să adaug aici că în calculul trivalent al lui Heyting, alternarea este definibilă, respectiv

$$Apq = KCCpqqCCqpp,$$

[8] Cititorul nu trebuie să confunde completitudinea funcțională, despre care vorbeşte autorul în acest pasaj, cu completitudinea logică (sau tezială). Un sistem de logică propozițională este complet în sens tezial sau logic, dacă orice expresie validă construită în sintaxa sistemului este teză a acestuia (n. trad.).

[9] Exprimarea este eliptică, autorul se referă la mulțimi infinit numărabile, respectiv, nenumărabile (n. trad.).

însă conjuncția nu. În calculul propozițional intuiționist niciuna dintre cele patru funcții *N*, *C*, *K*, *A* nu sunt definibile prin celelalte trei). Trebuie de asemenea menționat că în calculul meu trivalent mulțimea tezelor care fac uz de termenii *C* şi *N* şi care satisfac matricele poate fi axiomatizată. Demonstrația i se datorează lui Wajsberg, unul dintre primii mei discipoli, care a construit următorul sistem de axiome pentru acest calcul:

(1) *CpCqp*
(2) *CCpqCCqrCpr*
(3) *CCCpNppp*
(4) *CCNpNqCqp*

Matricele trivalente construite de mine sunt adecvate pentru acest sistem de axiome.

29. Calculul propozițional trivalent pe care eu l-am definit prin metoda matricelor şi care a fost axiomatizat de către Wajsberg, nu este, aşa cum am spus, complet întrucât nu toate cele 27 de funcții de un argument şi 19683 funcții de două argumente sunt definibile în el. Słupecki, un alt discipol al meu, a reuşit să facă sistemul complet prin adăugarea unei noi funcții, şi astfel completat să-l axiomatizeze. Słupecki a demonstrat că prin adăugarea funcției *Tp*, toate funcțiile sistemului pot fi definite şi a adăugat două noi axiome pentru această nouă funcție. Voi prezenta încă odată cititorului sistemul de axiome împreună cu matricele adecvate:

(1) *CpCqp*
(2) *CCpqCCqrCpr*
(3) *CCCpNppp*
(4) *CCNpNqCqp*
(5) *CTpNTp*
(6) *CNTpTp*

N	
1	3
2	3
3	1

C	1	2	3
1	1	2	3
2	1	1	2
3	1	1	1

T	
1	2
2	2
3	2

Regulile substituției şi detaşării sunt valide în acest sistem. Sistemul de axiome este independent, consistent şi complet, în sensul că orice expresie bine formată este sau deductibilă din axiomele sistemului sau, adăugată axiomelor rezultă o contradicție, altfel spus, asertează toate expresiile bine formate ale sistemului.

Sistemul este complet şi în sensul că toate funcţiile lui sunt definibile. În felul acesta sistemul are toate proprietăţile atribuite calculului propoziţional bivalent clasic. Cu aceasta, şi cea de-a patra problemă menţionată la început a fost rezolvată.

30. Am realizat un dificil progres în profunzime. Dificil nu doar pentru că problemele ce urmau a fi rezolvate sunt tehnic complicate (am omis detaliile tehnice şi am prezentat doar rezultatele), ci pentru că ele implică idei şi metode complet noi. Pot afirma cu certitudine că multe minţi luminate au muncit pentru a ajunge la aceste rezultate. Pentru a finaliza această prezentare mă voi referi pe scurt la semnificaţia acestor rezultate şi la legătura lor cu problema fundamentelor logicii.

31. La începutul acestei prezentări am spus că logica propoziţională intuiţionistă, pentru că respinge diferite teze ale calculului propoziţional bivalent, este un sistem mai slab decât acesta. El poate fi întărit în diverse moduri; putem alege, de pildă, tezele respinse pe care să le adăugăm apoi una câte una sistemului până obţinem sistemul cel mai puternic, adică logica propoziţională bivalentă. Numai că sistemul propoziţional trivalent complet creat de mine şi axiomatizat de Słupecki, îi voi spune mai scurt S-sistemul, este format într-un mod complet diferit. Dacă îi adăugăm o teză nedeductibilă din axiome, dar validă în calculul bivalent, nu obţinem un sistem mai tare, ci o contradicţie. Acest important fapt poate fi explicat printr-un exemplu:

(7) *CCNppp*
  (7) *p*/*Tp* = *C*(6)(8)
(8) *Tp*
  (5) = *C*(8)(9)
(9) *NTp*
  (2) *q*/*Cqp* = *C*(1)(10)
(10) *CCCqprCpr*
  (10) *q*/*Np*, *p*/*Nq*, *r*/*Cqp* = *C*(4)(11)
(11) *CNqCqp*
  (11) *q*/*Tp* = *C*(9)*C*(8)(12)
(12) *p*

32. Teza *CCNppp* nu are loc nici în logica intuiţionistă, nici S-sistemul trivalent. Dacă această teză se adaugă logicii intuiţioniste obţinem calculul bivalent, dar dacă se adaugă S-sistemului obţinem o contradicţie. Această contradicţie se demonstrează după cum urmează:

CCNppp se adaugă sistemului de axiome Słupecki ca teza (7). Din această teză şi din axiomele (6) şi (5) obţinem, prin substituţie şi detaşare, tezele contradictorii *Tp* şi *NTp*. Această contradicţie poate fi făcută chiar mai puternică întrucât, pe baza tezei *CNqCqp*, deductibilă în sistem, (8) şi (9) duc la concluzia *p* din care orice expresie bine formată poate fi obţinută prin substituţie.

33. Aceasta nu arată că S-sistemul este mai slab decât calculul bivalent, ci doar că este diferit de el. Pe de altă parte, S-sistemul conține teze, precum *CTpNTp* şi *CNTpTp*, care nu pot fi interpretate în calculul bivalent; în plus, putem indica teze ale calculului bivalent, cum ar fi *CCNppp*, care în S-sistem duc la contradicție. O logică cu totul nouă s-a dezvoltat în fața noastră – logica modală, scopul lui Aristotel şi al scolasticilor. Aceasta nu este singura formă posibilă a logicii propoziționale trivalente; există diferite tipuri de sisteme trivalente, nereductibile unul la celălalt, şi nenumărate forme de sisteme polivalente mai înalte. Aceste variate forme de logică propozițională polivalentă sunt față de calculul propozițional bivalent clasic într-o relație mai mult sau mai puțin asemănătoare relației dintre geometriile neeuclidiene şi geometria lui Euclid. Există totuşi o diferență: în timp ce geometriile neeuclidiene pot fi interpretate în cea euclidiană, interpretarea sistemelor polivalente în sistemul bivalent pare scoasă din discuție. Invers, logica propozițională bivalentă se poate interpreta în termenii S-sistemului în mai multe forme, dovadă că logica trivalentă este mai tare şi mai bogată decât cea bivalentă[10].

34. Am ajuns astfel la cel mai important punct al problemei fundamentelor matematicii. Calculul propozițional este disciplina logică fundamentală pe care întreaga logică este bazată, iar matematica, la rândul ei, se bazează pe logică. Pentru că sunt diferite sisteme de logică propozițională, nereductibile unul la altul, tot aşa trebuie să fie şi diferite sisteme ale logicii predicatelor, iar de aceste sisteme ar trebui să depindă diferite sisteme de teoria mulțimilor şi de aritmetică. Deocamdată nici o lucrare nu există în acest domeniu. Am reuşit până acum doar construirea de sisteme polivalente de logică propozițională cu cea mai mare precizie formală. Dacă sistemele respective s-ar aplica matematicii, ele ar funcționa inclusiv din punct de vedere intuitiv. Că acest lucru este posibil a fost demonstrat prin exemplul logicii propoziționale intuiționiste. Un motiv suficient pentru ca aceste importante şi fundamentale cercetări să fie intrprinse şi de logicieni şi de matematicieni[11].

*

* *

Łukasiewicz a arătat într-o explicație adițională că *Tp* este cel mai convenabil termen pentru axiomatizarea logicii sale, însă un alt termen, simbolizat cu *Mp*, poate fi folosit în acelaşi scop fără a lăsa de dorit din punct de vedere al semnificației sale intuitive întrucât poate fi interpretat ca „posibil". Sistemul corespunzător de axiome va fi atunci următorul:

[10] Afirmația autorului trebuie luată cu rezerve. Dacă în sistemul său îl intrepretăm atât pe 2, cât şi pe 3, prin fals obținem sistemul bivalent de calcul propozițional (n. trad.).

[11] Situația privind aplicațiile logicilor polivalente în domeniul matematicii şi al fundamentelelor matematicii s-a schimbat de la data publicării acestui studiu de către J. Łukasiewicz. Pe lângă faptul că au apărut noi sisteme de logică polivalentă, dintre care unele au directă legătură cu matematica (vezi logica lui Kleene, de exemplu), au apărut şi noi modalități de investigare logică a matematicii. Din păcate, Łukasiewicz nu a insistat suficient asupra limitelor sistemelor respective, mai ales asupra limitelor provenite din caracterul neextensional al acestora (n. trad.).

1. *CNMpCNMpNp*
2. *CNMNpCNMNpp*
3. *CMpCMpMNp*
4. *CCpqCCNpqCCMpqq*.

Acest sistem poate fi interpretat intuitiv. Totuşi, nu este posibilă interpretarea intuitivă a tuturor funcţiilor definibile în sistem. Numărul lor (3^9) este mult prea mare pentru ca limbajul comun să aibe expresii corespunzătoare pentru fiecare funcţie în parte. Însă acesta este şi cazul logicii bivalente. Lipsa de reprezentare în limbaj pentru o parte (chiar o covârşitoarea parte) a funcţiilor posibile nu este astfel un argument împotriva caracterului intuitiv al sistemului.

Traducere din limba engleză de Iancu Lucica

Notă. Traducerea s-a realizat după Jan Łukasiewicz, *Logic and The Problem of The Foundations of Mathematics*, publicat în J. Łukasiewicz, *Selected Works*, North-Holland Publishing Company – Amsterdam London; PWN – Polish Scientific Publishers – Warszawa, 1971, pp. 278–294.