SCHIȚĂ ISTORICO-FILOSOFICĂ A ÎNCEPUTURILOR FINITISMULUI STRICT

VIOREL VIZUREANU
Institutul de Filosofie şi Psihologie „Constantin Rădulescu-Motru" al Academiei Române
Universitatea din Bucureşti

A Historical-philosophical Sketch of the Beginnings of Strict Finitism. The aim of our paper is to offer a historical sketch of the beginnings of strict finitism, especially from the point of view of its many philosophical aspects. A major hypothesis of our approach is that this presentation could be better done if we have in mind as a necessary background the intuitionistic, and broadly speaking constructivist mathematical issues, also in a historical dimension. As a result, apart from some brief general remarks, we will give here an insight mainly into the texts of some pioneering works in this field of Paul Bernays, Émile Borel and David van Dantzig and into some important connections with Brouwer's intuitionism.

Keywords: Strict finitism; Intuitionism; Paul Bernays; Émile Borel; David van Dantzig; L.E.J. Brouwer.

CONSIDERENTE INTRODUCTIVE

Ne vom ocupa în cele ce urmează, precum şi în alte articole preconizate a continua acest demers, de ceea ce am putea numi o schiță istorică a *finitismului strict*, în special din perspectiva acelor elemente care sunt prezente în discuțiile în cauză şi care pot fi caracterizate drept filosofice. Totodată, abordarea noastră pleacă de la premisa – care şi ea ar putea fi supusă unei investigații suplimentare cu un alt prilej – că această prezentare se poate realiza având ca fundal problematica *intuiționistă* şi, în general, *constructivistă* din matematică, din care apreciem că dezbaterea proprie finitismului strict derivă în bună măsură. Este şi motivul pentru care aici pot şi vor fi invocate nu doar acele realizări îndeobşte atribuite (de autorii lor sau de interpreți ulteriori) finitismului strict, ci şi cele cunoscute uneori sub alte denumiri care apar astfel ca alternative nominale pentru acesta: *ultrafinitism*, *ultraintuiționism* etc.

Nu ne propunem însă să dezbatem pe parcursul acestei lucrări – cel puțin nu tranşant sau în detaliu – aspectele legate de îndreptățirea folosirii denumirilor în cauză. Ceea ce nu înseamnă deloc că am aprecia că aici avem de-a face doar cu aspecte de ordin strict „nominal", care pot fi expediate cu uşurință în zona verbiajului matematic redundant, că am putea pur şi simplu „sări" acest moment al discuției.

Rev. filos., **LXVI**, *2*, p. 187–206, Bucureşti, 2019

Variațiile, ezitările, polisemiile etc. atribuirilor ce sunt specifice acestui peisaj matematic aparte sunt „imputabile”, în bună măsură, genului de complexitate a „obiectului” studiat şi, totodată, dimensiunii filosofice inerente acestuia. Rămâne, deci, ca şi în această privință să revenim cu un demers – sperăm – mai clarificator, odată ce panoramarea pozițiilor prezentate se va fi încheiat.

Câteva scurte observații introductive se impun totuşi, chiar dacă ele nu trebuie luate ca sentințe definitive cu privire la cercetarea pe care ne-o asumăm în continuare. Întâi de toate, trebuie plecat poate, dacă este să acceptăm judecata lui Mathieu Marion, de la observația că variatele programe strict finitiste propuse în ultimele decenii[1] nu se prezintă deloc ca având prea mare omogenitate – nu există prin urmare vreo abordare care ar putea fi considerată canonică în această privință[2]. Iar aceasta spre deosebire de intuiționism, adaugă Marion, unde, putem presupune, viziunea inauguratoare lui Brouwer reprezintă un astfel de reper să îi spunem canonic. Mai mult, este posibil ca tocmai starea de lucruri menționată anterior să fi determinat şi apariția destul de târzie a unor analize dedicate acestei direcții de gândire matematică luată în ansamblu.

Pe de altă parte, Jim Mawby aprecia în debutul tezei sale de doctorat din 2005 consacrate acestui subiect că diferite aspecte care țin de finitismul strict au fost discutate în filosofia matematicii, dar că „susținătorii acestei teorii sunt puțin numeroşi”[3], adăugând că „[d]in acest motiv, probabil, nu există [încă] o prezentare de încredere (*reliable*), generală” a acesteia, el urmărind de altfel prin încercarea sa să umple chiar acest gol[4].

Totuşi, cum aminteam şi mai sus, este posibil ca unul dintre motivele care determină, în continuare, decisiv chiar, persistența unui peisaj destul de fragmentar, să fie legat de existența în însăşi „inima” finitismului strict a unei ambiguități fundamentale. Dacă, împreună cu Mary Tiles, acceptăm că finitismul strict nu doar exclude infinitatea din câmpul activității matematicianului, ci şi că distinge între

[1] Observația lui Marion este din 1998, dar apreciem că ea poate fi extinsă fără probleme până în zilele noastre.

[2] Mathieu Marion, *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1998, p. 213. Fireşte, concluzia punctuală a lui Marion nu corespunde strict conținutului ce o precedă. Ne putem gândi la o diversitate de abordări, dintre care există totuşi una care se „impune” / este considerată canonică. Pe de altă parte, ne putem gândi că insistența (şi persistența) unei descrieri, de-a lungul timpului, prin atributul „diversitate” a unui peisaj teoretic în integralitatea sa poate deriva, într-adevăr, din lipsa „cronică” a unui „lider” ideatic care să fi (re)configurat acel peisaj în jurul său.

[3] Evaluarea în cauză trebuie înțeleasă mai degrabă prin raportare la numărul adepților teoriilor să le numim „clasice” din matematică, care, de exemplu, identifică matematica cu sistemul de simboluri şi de reguli relative la acestea, fără nicio referire la activitatea concretă a matematicianului.

[4] Jim Mawby, *Strict Finitism as a Foundation for Mathematics*, Submitted for a degree of PhD, September 2005, at Glasgow University (accesibilă la adresa http://theses.gla.ac.uk/1344/). Prezentarea sa se finalizează cu propunerea unui model finitist strict, pe care Mawby îl numeşte „finitism fanatic (*Fanatical Finitism*)”. Mawby explorează limitele acestei teorii „prin opoziție cu alte concepte de finitism, şi chiar cu teorii mai cuprinzătoare despre numere înțelese ca entități dependente de mintea omenească” (*op. cit.*, 10).

numere finite „mici" şi numere finite „mari", cu pretenția aferentă că „există o limită superioară (finită) a numerelor până la care ne putem raporta într-o manieră inteligibilă", atunci este deschisă inerent şi posibilitatea de a discuta despre „cum o astfel de limită poate fi stabilită sau determinată"[5]. Ceea ce înseamnă că, pentru Tiles, orice enunț precis al unei poziții subsumabile finitismului strict va reprezenta „o chestiune delicată" (*a delicate matter*). Ca şi în cazul paradoxului chelului sau al grămezii, suntem nevoiți să păstrăm concomitent distincția dintre „accesibil" şi „non-accesibil omului" (*surveyable / unsurveyable*)[6] şi asertiunea că „adăugarea unei unități nu este suficientă pentru a efectua tranziția la un stadiu de non-accesibilitate"[7].

*

În tot acest tablou blurat care persistă în timp, apreciem totuşi că există în principal trei tipuri de discurs relativ la maniera în care este instanțiat finitismul strict în analiza celor care vehiculează termenul ca atare sau reprezintă o poziție subsumabilă acestei orientări:

1) dintr-o perspectivă să îi spunem „exterioară", ca urmare a unei critici a pretențiilor intuiționiste / constructiviste de a trimite doar la construcții matematice ce pot fi realizate efectiv – a indica o poziție de tipul finitismului strict nu revine atât la o dezvoltare a intuiționismului, cât la relevarea inconsistenței acestei poziții. Astfel, în ciuda sugestiilor de dezvoltare a unei poziții alternative, mai coerente a intuiționismului (lui L.E.J. Brouwer), obiecțiile lui Paul Bernays[8] rămân până la urmă expresia unei astfel de critici aduse din perspectiva unei poziții „adverse".

2) dintr-o perspectivă oarecum „internă", ca rezultat al dorinței de a pune în acord intuiționismul/constructivismul cu el însuşi, în esență tot pe baza unei observații critice de felul celei anterioare, dar cu scopul de a dezvolta o alternativă reală – sau o continuare „pozitivă" – la acesta. Putem menționa aici poziția recentă a lui Mawby, amintită anterior: acesta consideră că „finitismul strict este probabil o prelungire naturală a ideilor constructiviste", dar una care „îşi extrage în parte motivația din obiecția că intuiționismul, care este tot o filosofie constructivistă[9], nu ia suficient în serios principiile (*the tenets*) constructivismului". Altfel spus, finitismul strict implică o întărire a constrângerii constructiviste îndreptată, pentru reprezentanții acestui curent, într-o direcție „perfect naturală", aceea de a accepta drept construcții matematice doar pe acelea care sunt posibile în mod actual sau efectiv, *i.e.* date fiind constrângerile / puterile efective ale minții omeneşti „concrete"[10].

[5] Mary Tiles, *The Philosophy of Set Theory: An historical introduction to Cantor's paradise*, Blackwell, Oxford, UK / Cambridge, Mass., U.S.A., 1989, pp. 6–7.

[6] Am preluat sugestia traducerii lui *surveyable* în română prin „accesibil omului" din Ilie Pârvu, *Introducere în epistemologie*, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1984, p. 309.

[7] M. Tiles, *op. cit.*, p. 7.

[8] Vezi infra, prezentarea făcută observațiilor critice ale lui Bernays.

[9] Şi deci o formă de finitism, mai menționează Mawby (*op. cit.*, 8).

[10] *Ibidem*, pp. 7–8.

3) dintr-o perspectivă mai degrabă „neutră”, ca rezultat al unei prezentări a întregului tablou / context implicat – în acest sens, finitismul strict poate să apară ca poziție posibilă / justificabilă într-o desfășurare „logică” a gradelor de aderență pe care le putem întâlni pe o scară ce duce de la finit la infinit. Un astfel de exemplu este de găsit la Hao Wang[11], care, plecând de la un studiu al aceluiaşi Paul Bernays[12], propune o prezentare graduală, „într-o ordine de constructivitate descrescândă”, a pozițiilor („nuanțe” – *shades* – în terminologia sa) în fundamentele matematicii, după cum urmează: a) *antropologism*[13]; b) *finitism* (în sens larg); c) *intuiționism*; d) *predicativism* (teoria predicativă a mulțimilor sau teoria numerelor naturale ca entități – *as being*); e) *platonism* (teoria clasică a mulțimilor). Pentru Wang, primele trei „nuanțe” exprimă o „matematică a acțiunii” (*mathematics of doing*), în vreme ce următoarele două trimit la o „matematică a existenței” (*mathematics of being*). Este important de observat în contextul discuției noastre că Hao Wang împărtăşeşte împreună cu Bernays viziunea conform căreia „nu este nevoie ca cineva să facă o alegere între aceste puncte de vedere” şi că „sarcina cea mai importantă a cercetării fundaționale este de a le formula (pe acestea) în mod precis şi de a analiza relațiile dintre ele”[14]. Toate cele cinci orientări sunt pentru Wang „relatări folositoare despre o aceeaşi structură principală, care ne-ar permite să construim un tablou integral mai adecvat decât fiecare şcoală luată în parte. Deşi filosofii ar putea găsi că acest armistițiu este mai puțin impresionant decât războiul de exterminare între şcoli, armistițiul conduce incontestabil la o abordare mai eficientă a scopului inițial – înțelegerea matematicii”[15]. Altfel spus, matematica este dată de abordarea comprehensivă, în totalitate, a structurii formate de pozițiile complementare şi a relațiilor dintre acestea (presupunând fie continuitatea, fie delimitarea între anumite presupoziții), nu de aprofundarea exclusivă a uneia în detrimentul celorlalte. Practic, aceasta înseamnă, apreciem noi, şi că nici nu ar putea exista ceva de ordinul unei victorii „decisive” a unei orientări în fața celorlalte, că toate acestea reprezintă poziții potențiale conectate între ele, justificabile ca atare prin epuizarea câmpului teoretic, ca într-un fel de tablou transcendental *sui generis* al matematicii.

Trebuie subliniat însă că aceste trei tipuri de contextualizare identificate de noi nu se exclud întru totul, ele chiar se pot suprapune sau amesteca în unele

[11] Hao Wang, „Eighty Years of Foundational Studies”, *Dialectica*, vol. 12 (1958), pp. 466–497; Hao Wang, *Studii de logică matematică*, trad. de S. Vieru şi U. Morgenstern, Editura Științifică, Bucureşti, 1972.

[12] Paul Bernays, „Sur le platonisme dans les mathématiques”, *L'Enseignement Mathématique*, vol. 34 (1935), pp. 52–69.

[13] Termen pe care îl preferă „finitismului într-un sens (mai) restrâns (*finitism in the narrower sense*)”, considerându-l chiar şi mai restrâns decât acesta din urmă (Wang, „Eighty Years...”, p. 472).

[14] Charles Parsons, „Hao Wang as Philosopher”, în Petr Hajek (ed.), *Gödel '96: Logical Foundations of Mathematics, Computer Science and Physics – Kurt Gödel's Legacy. Brno, Czech Republic, August 1996, Proceedings*, Springer, Berlin etc., 1996, p. 67.

[15] Hao Wang, *Studii de logică matematică*, p. 44.

analize, dar cu toate acestea pot fi evidențiate separat. La Bernays, de exemplu, după cum vom vedea mai jos, regăsim combinate 1) şi 3).

CÂTEVA REPERE DESCHIZĂTOARE DE DRUM PENTRU O PREZENTARE ISTORICĂ A FINITISMULUI STRICT

În peisajul relativ sărac al unor analize istorice consacrate acestui curent din fundamentele matematicii, în urmă nu cu multă vreme a apărut ceea ce s-a numit „O foarte scurtă istorie a ultrafinitismului”, datorată lui R. Cherubin şi M. Mannucci[16]. Într-un mod oarecum surprinzător, autorii îşi încep prezentarea istorică cu ceea ce ei numesc preistoria ultrafinitismului, şi anume cu analiza contextelor în care sunt utilizați termenii *murios* (cu două sensuri principale: mulți, foarte mulți, nenumărați etc., respectiv zece mii)[17] şi *apeiron* (nelimitat, indeterminat, indefinit, infinit etc.)

[16] Rose M. Cherubin, Mirco A. Mannucci, „A Very Short History of Ultrafinitism”, în J. Kennedy şi R. Kossak (eds.), *Set Theory, Arithmetic and Foundations of Mathematics: Theorems, Philosophies*, 2011, pp. 180–199.

[17] O problemă asemănătoare s-ar putea evidenția şi în limba română unde, prin „nenumărate/ nenumărați” se înțelege îndeosebi un număr mare / imens de elemente, uneori finit însă (cel puțin în principiu), care ori nu pot să fie practic numărate, ori nu necesită într-un anumit context o numărare exactă. Dacă este să oferim o exemplificare prin referințe literare a unui oarecare descrescendo a numărului vizat putem menționa: „Stele nenumărate, ca nisipul mării, scânteiază care de care mai mult”, D. Bolintineanu; „Învățămintele şi rânduielile lumii civilizate sunt nenumărate”, M. Sadoveanu; „Turme nenumărate, ca stelele, păşteau în câmpii întinse”, A. Russo; „El numără în gându-i zile nenumărate”, M. Eminescu (cf https://dexonline.ro/definitie/nenum%C4%83rat; accesat la 3.05.2018). Sunt prezente aici, apreciem, mai multe paliere semantice: 1) este implicată o numărătoare care practic nu se poate încheia, dat fiind numărul extrem de mare al elementelor vizate (stelele, să spunem); aici se poate adăuga şi imposibilitatea de a fi atent „până la capăt” în procesul de parcurgere a acestora sau viteza prea mare cu care acestea se mişcă sau se transformă; 2) este vorba de o numărătoare care implică un număr extrem de mare de elemente, dar care – prin comparație cu cele anterioare – sunt şi greu de identificat ca atare sau permit apariția (eventual şi în sens dinamic-istoric) a noi elemente necunoscute până atunci (rânduielile lumii, de exemplu; aceasta în ideea că stelele, spre deosebire de rânduieli, sunt oarecum date privirii „static” sau „concomitent” – deşi, evident, ştiințific vorbind, şi numărul lor evoluează în timp, stele apar şi dispar etc.); 3) este implicat un număr foarte mare, dar care ar putea, evident, fi parcurs într-un timp finit (frunzele unui copac, de exemplu; sau exemplarele unei turme – aici poate interveni şi dificultatea conferită de dinamica în spațiu a exemplarelor în cauză); aici pot fi introduse şi considerente contextual-psihologice: de multe ori utilizăm „nenumărat” pentru a indica de fapt că nu vedem sensul sau importanța pentru care să efectuăm o astfel de numărătoare (în timp ce, normal, pentru proprietarul unei turme, a cunoaşte numărul exact al exemplarelor din acea turmă este o chestiune vitală); 4) este implicat un număr foarte mare, dar se doreşte sublinierea faptului că este vorba de un număr mult mai mare decât cel aşteptat sau cuvenit în acel context („i-a adus nenumărate laude în discursul său”, pentru a folosi un exemplu adițional celor menționate anterior). Nu am urmărit nicidecum să epuizăm astfel mulțimea acestor paliere semantice (am fi tentați să spunem chiar că, poate, acestea sunt... nenumărate), ci doar să atragem atenția că – aici, ca şi în, probabil, oricare alt caz al vreunui termen al limbii – exprimarea unor realități „sensibil” diferite este acoperită de unul şi acelaşi termen (fireşte, nu ne referim aici la omonimia clasică). Nu mai discutăm suplimentar şi cazul, extrem de frecvent, când noi, de fapt, nu ştim cu exactitate despre ce vorbim (nu avem o definiție precisă a unui lucru sau o „imagine standard” a aceluia), aşa că „nenumărat” ar trimite aici în mod fundamental la o imprecizie / confuzie semantică

în texte din Grecia antică şi a semnificaţiilor care derivă de aici[18]. După cum observă cei doi autori, chiar dacă aceşti gânditori (printre care Homer, Hesiod, Herodot, Anaximandros, Zenon sau Aristotel) nu au dezvoltat propriu-zis o teorie a ultrafinitului, ei exprimă în anumite fragmente „conştiinţa unor trăsături cruciale şi adesea insuficient remarcate" ale acestuia, „cum ar fi fezabilitatea (*feasability*) sau transcenderea limitelor într-un anumit context"[19]. Din păcate, Cherubin şi Mannucci nu dezvoltă suplimentar această parte a prezentării lor în direcţia evidenţierii – pe un palier hermeneutic superior – a unor posibili invarianţi structurali care să permită identificarea unei poziţionări „trans-istorice" în această privinţă.

După Antichitatea greacă, cei doi autori deplasează brusc – şi oarecum arbitrar, după cum ei înşişi recunosc – analiza lor direct la mijlocul secolului trecut, apreciind lapidar că drumul de la preistoria la istoria recentă a ultrafinitismului este unul dificil de trasat. În acest nou context istoric, ei vor puncta sumar şi relativ discontinuu demersuri precum cele ale lui D. van Dantzig (prin intermediul căruia este amintit în treacăt şi É. Borel), A.S. Esenin-Volpin, Edward Nelson, Derek Parikh. Este motivul pentru care analiza acestora se cere completată atât din perspectiva numelor (unele dintre ele importante) care trebuie adăugate, cât şi a unei minimale reţele hermeneutice care să oarecum „lege" diferitele contribuţii invocate[20].

În cele ce urmează, ne vom concentra doar asupra primelor elemente (în sens istoric) care pot fi caracterizate ca exprimând o poziţie ultrafinitistă în secolul trecut – elemente care sunt prezente în încercări (îndeosebi la Borel, Bernays, van Dantzig) care nu îşi propun totuşi să se dezvolte într-o veritabilă concepţie (teorie) de o asemenea factură, elaborată în detaliu sau „programatic" deci am putea adăuga. După cum vom vedea, elementele în cauză apar mai cu seamă în orizontul unei critici a intuiţionismului desfăşurate cu scopul de a evidenţia îndeosebi o contradicţie internă a acestuia, mai precis între pretenţia unei constructivităţi fondatoare a activităţii matematicianului şi practica efectivă ulterioară a acestuia ce recurge inevitabil la mecanisme abstract-formaliste, care fac posibilă apariţia în discursul matematic a unor entităţi care de fapt nu pot fi construite efectiv. Vom lăsa deci deoparte deocamdată acele propuneri bine structurate (Esenin-Volpin, Nelson, Dummett, R.O. Gandy etc.), dar şi fragmentele din Wittgenstein care pot fi invocate pentru identificarea şi în cazul său a unei astfel de poziţionări[21], pentru o abordare viitoare,

(de exemplu, ceea ce numim „fenomene paranormale" sau „supra-normale"; mai mult, este posibil ca, în timp, unele astfel de fenomene să devină perfect „normale" sau altele, considerate acum „normale", să capete brusc aura „supra-normalului"). Pentru anumite observaţii utile în anumite privinţe atinse de noi, dar din perspectivă fenomenologică, vezi Sören Stenlund, „Different senses of finitude: An inquiry into Hilbert's finitism", *Synthese*, vol. 185 (2012), pp. 335–363.

[18] Cherubin şi Mannucci, *op. cit.*, pp. 182–193.

[19] *Ibidem*, p. 180.

[20] De exemplu, prin raportarea acestora – fie şi de o manieră succintă – la disputa privind fundamentele matematicii de la începutul secolului trecut.

[21] Îndeosebi ca urmare a complexităţii bine-cunoscute a poziţiei filosofice „generale" a lui Wittgenstein (chiar dacă ne restrângem la cea de-a doua parte a activităţii sale) în care trebuie integrată minimal abordarea sa a matematicii, dar şi a existenţei unei literaturi secundare consistente ce a abordat acest subiect.

neapelând la acestea decât punctual, atunci când va fi nevoie a pune mai bine în lumină unele probleme ce ţin de elementele mai sus-menţionate.

*

După Michael Dummett, cel care a sugerat pentru prima oară în matematica modernă o poziţie de tipul celei a finitismului strict a fost **Paul Bernays** (1888–1977), în 1935[22]. În articolul său, intitulat „Sur le platonisme dans les mathématiques”, mai precis în paginile consacrate aici unei analize critice a presupoziţiilor fundamentale ale teoriei lui Brouwer, Bernays observă mai întâi că instanţa epistemică supremă invocată de acesta este *evidenţa*, anume că numărul întreg este înţeles originar în sens intuitiv, mai precis plecând de la o intuiţie a timpului concepută din perspectivă kantiană[23]. El se întreabă în continuare cum poate fi extinsă această evidenţă în cadrele matematicii intuiţioniste. În acest context, două întrebări i se par decisive şi necesită un răspuns urgent pentru a aprecia pretenţiile epistemice ale intuiţionismului: 1) Este absolut sigur că evidenţa oferită de intuiţia aritmetică se extinde atât de mult cât aritmetica intuiţionistă o solicită? 2) Este posibil să se traseze o graniţă exactă între ceea ce este evident şi ceea ce este doar plauzibil?[24]

Pentru Bernays, răspunsul la ambele întrebări precedente este unul negativ. Întâi de toate, evidenţa este un concept relativ atât printre oamenii obişnuiţi, cât şi printre oamenii de ştiinţă. În plus, se întâmplă nu rareori ca unul şi acelaşi om să respingă ceea ce anterior privea ca ţinând de domeniul evidenţei. Dar, dincolo de aceste observaţii generale, previzibile, pentru Bernays mai trebuie observat şi că „intuiţionismul nu dă nicio importanţă posibilităţii ca operaţiile solicitate de metoda recursivă de construcţie a numerelor, atunci când avem de-a face cu numere foarte mari, să înceteze să aibă vreo semnificaţie concretă. De la două numere întregi k şi l, se trece imediat la k^l; acest procedeu duce în câţiva paşi la numere care sunt cu mult mai mari decât cele care ne sunt accesibile în experienţă, *e.g.* $67\uparrow 257\uparrow 729$”[25].

[22] Michael Dummett, „Wang’s Paradox”, în idem, *Truth and Other Enigmas*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.,1978 (iniţial apărut în 1970), p. 249. A se vedea şi M. Marion, *op. cit.*, p. 214. În mod curios şi totodată inexplicabil, acest episod semnificativ lipseşte cu desăvârşire din istoria schiţată de Cherubin şi Mannucci. Felice Cardone apreciază şi el că „Bernays (în 1935) a fost probabil primul care a conştientizat că o noţiune a posibilităţii *practice*, asociată o concepţie a matematicii ca activitate umană, ar putea constitui bazele unei posibile poziţii în fundamentele matematicii” („Strict Finitism and Feasibility”, în Daniel Leivant (ed.), *Logic and Computational Complexity: International Workshop LCC '94, Indianapolis, IN, USA, October 13–16, 1994, Selected Papers*, Springer, Berlin / Heidelberg / New York, 1995, p. 2). Cardone realizează în preambulul propriei sale contribuţii în domeniu şi o extrem de scurtă prezentare a diverselor poziţii subsumabile finitismului strict, sub forma unei reţele de influenţe implicite sau explicite (*ibidem*, pp. 2–3).

[23] P. Bernays, „Sur le platonisme...”, p. 60.

[24] Bernays va reveni ulterior asupra acestui subiect, de o manieră şi mai critică faţă de semnificaţia evidenţei în cunoaştere în genere, în articolul său „Quelques points de vue concernant le probleme de l’évidence”, *Synthese*, Vol. 5, No. 7/8 (Nov.–Dec., 1946), pp. 321–326.

[25] P. Bernays, „Sur le platonisme...”, p. 61. După cum notează şi Troelstra şi van Dalen (*Constructivism in Mathematics: An introduction*, North-Holland, Amsterdam etc., 1988, vol. I, p. 6)

În mod clar, reprezentarea acestui din urmă număr în sistemul zecimal nu este datorată faptului că îl „obţinem" efectiv astfel. Pentru Bernays este vorba aici de aplicarea metodei generale a analogiei, prin extinderea la numere inaccesibile a relaţiilor care pot fi verificate în mod concret pentru numerele accesibile. În cadrul acestor consideraţii, Bernays „introduce pentru prima oară (...) o distincţie între posibilitatea *în practică* şi posibilitatea *în principiu*"[26]. Legând acest aspect de constatarea sa privind caracterul eterogen al concepţiilor strict finitiste, Marion arată că unii exponenţi ai finitismului strict îşi doresc într-adevăr să elimine rezultatele matematice care depind doar de posibilitatea „în principiu", în vreme ce alţii se mulţumesc doar cu studierea „de dragul ei" a acestei distincţii[27]. În plus, revenind la Bernays, aplicarea acestei analogii este susţinută suplimentar de faptul că nu există o demarcaţie riguroasă între numerele care sunt accesibile (realizabile) şi cele care nu sunt astfel[28].

O scurtă paranteză. De notat că în 1952 matematicianul francez **Émile Borel** (1871–1956)[29] va dedica acestui gen de numere o întreagă lucrare: *Les nombres inaccessibles*. Borel defineşte inaccesibilitatea relativ la notaţia zecimală şi durata vieţii omeneşti, atât în sens ontogenetic, cât şi filogenetic: dacă asumăm „o durată finită a umanităţii în trecut şi în viitor, numărul total al oamenilor va fi şi el unul finit şi fiecare, în cursul vieţii sale, nu va putea defini *în mod efectiv* decât un număr finit de numere întregi"[30]. Astfel definind accesibilitatea, rezultă că limita superioară efectivă a acesteia este una mobilă, istoric vorbind, cea definitivă „neputând fi cunoscută decât la sfârşitul omenirii"[31]. Deci, important de subliniat, inaccesibilitatea despre care vorbeşte Borel este una *relativă*. Însă el trece uneori de la relativitatea dată de modificarea continuă a numărului întreg care poate fi obţinut efectiv de oameni în decursul istoriei (finite) a umanităţii (filogenetică) la relativitatea teoretic-cognitivă, dependentă de caracterul de ipoteză cu privire la existenţa finită a universului şi, deci, a umanităţii, conţinută în teoriile ştiinţifice ce vizează existenţa limitată a universului[32]: „Concluzia noastră este că există numere

legat de diferenţa dintre un număr precum 5 şi $10\uparrow10\uparrow10$, „[e]xponenţierea ca operaţie care se poate realiza întotdeauna relativ la numerele naturale implică o componentă mai abstractă (*a more abstract idea*) decât atunci când avem de-a face cu generarea şirului numerelor naturale".

[26] M. Marion, *op. cit.*, p. 214.

[27] *Ibidem*, p. 215.

[28] În acelaşi sens, vezi mai sus remarcile lui Mary Tiles. Această ambiguitate este surprinsă de altfel de paradoxul lui Wang, al cărui rezultat este că toate numerele ajung să fie considerate mici.

[29] Să notăm că am realizat o foarte scurtă trecere în revistă a anumitor aspecte conţinute în gândirea matematică a lui Borel care pot fi caracterizate ca fiind (pre)intuiţioniste în studiul „Preintuiţionismul matematic. Schiţă istorică şi dimensiuni logico-filosofice", apărut în volumul nostru *Logică şi metodologie în istoria filosofiei. Studii de caz*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2013, pp. 87–126 (vezi pp. 101–103).

[30] Émile Borel, *Les nombres inaccessibles*, Gauthier-Villars, Paris, 1952, p. 3.

[31] *Ibidem*, p. 4.

[32] Există de altfel prezentă la unii autori o manieră de a susţine ideile finitismului strict plecând de la *caracterul finit al universului*. Astfel, pentru Mawby o investigaţie de felul celei a finitismului strict nu este utilă doar matematicii *per se*, ci are o semnificaţie mai largă (sau indirectă) dacă

întregi inaccesibile, adică numere care nu vor fi niciodată obținute (*atteints*) de niciun om, dar pe care, prin chiar definiția lor, nu le cunoaştem şi că ne este imposibil de a arăta care este această limită, întrucât limita respectivă este ea însăşi inaccesibilă. Trebuie deci să considerăm această inaccesibilitate drept relativă, întrucât ea *depinde de ipotezele noastre* cu privire la durata existenței universului şi a oamenilor (subl. ns.)”[33].

Dar, la Borel, nu trebuie echivalat „a defini” cu „a realiza (efectiv)” acel număr, el văzând în calcularea în cauză sursa unei probleme pe care doar o menționează: „se poate vădi ca acest calcul să nu fie uşor de efectuat, din cauza duratei sale, dar nu vom insista asupra acestei dificultăți suplimentare şi nu ne vom bate capul cu privire la numărul de secole care ar fi necesare unei armate întregi de indivizi să calculeze pentru a îl obține”[34]. Cu toate acestea, distincția număr accesibil / inaccesibil este pentru Borel una „naturală” şi nu una „artificială”, în sensul că nu ar putea să apară ceva care să o anuleze[35]. În limbaj tehnic, este vorba de o demonstrație care are drept concluzie atribuirea caracterului de invarianță absolută distincției în cauză[36].

Revenind la analiza lui Bernays să notăm că, în lumina celor spuse anterior, evidența pretinsă de intuiționism nu se extinde în mod neproblematic (am spune chiar „evident”) la totalitatea entităților / adevărurilor acceptate în cadrele acestuia. Nu toate evidențele vehiculate de intuiționism sunt evidențe *imediate*. Matematicianul intuiționist, arată Bernays, face apel în raționamentele sale şi la reflecții de natură abstractă.

Tocmai aplicarea sistematică a unor forme abstracte de raționare de către Brouwer – apreciază Bernays – l-au condus pe acesta la depăşirea metodelor asumate de Kronecker în considerarea numerelor naturale drept bază pentru aritmetizarea în sens constructivist a întregii matematici. Mai mult, el ar fi reuşit astfel „să stabilească o logică generală intuiționistă, care a fost sistematizată [ulterior] de către Heyting”[37]. Să notăm în treacăt că, plecând de la aceste

acceptăm că „fizica modernă susține că atât spațiul cât şi timpul sunt finite, cel puțin în extindere, iar lucrările recente sugerează că nu este deloc implauzibil să afirmăm că ele sunt şi finit divizibile”. Aceste observații fac plauzibilă conceperea unui *finitism „global”*, care implică respingerea noțiunii de infinit la ambele niveluri, fizic, respectiv matematic (J. Mawby, *op. cit.*, p. 8). Pe de altă parte, Mary Tiles argumentează că însăşi experiența empirică „obişnuită” a universului, așa cum este desfăşurată chiar dintr-o perspectivă finitistă, implică cu necesitate acceptarea ipotezei continuului (deci şi a divizibilității la infinit), ca şi a lipsei de limite pentru spațiu şi timp: „[a]r părea, așadar, că deja a vorbi despre spațiu şi timp ne duce dincolo de ceea ce poate fi considerat ca fiind dat prin referință la experiența imediată şi deja amenință să facă loc infinitului” (M. Tiles, *op. cit.*, p. 9).

[33] É. Borel, *Les nombres inaccessibles*, p. 4.

[34] *Ibidem*, p. 5.

[35] *Ibidem*, p. 10.

[36] Să consemnăm că unele considerente asemănătoare, în legătură în special cu universul fizic, fuseseră prezentate anterior de către Borel în lucrarea *Probabilité et certitude* (1950).

[37] P. Bernays, „Sur le platonisme...”, p. 63. Este de notat aici afirmația surprinzătoare (şi care nu vedem cum ar putea fi susținută, altfel decât oferind logicii un înțeles ne-tehnic, „slab”) a lui Bernays conform căreia Brouwer însuşi ar fi fost inițiatorul unei logici (generale) intuiționiste, pe care Heyting nu a făcut decât să o sistematizeze.

considerații, Bernays merge și mai departe cu interpretarea sa, susținând că utilizarea fără restricții de către Brouwer a noțiunii de consecință face ca trăsătura generală a intuiționismului său să nu fie aceea de a fi fundat în intuiția pură, ci de a institui o raportare a subiectului reflexiv și activ (*sujet réfléchissant et agissant*) la totalitatea științei obținute[38]. Or, acesta reprezintă în viziunea lui Bernays un punct de vedere metodologic extrem (precum este și platonismul matematic extrem reprezentat de logicismul lui Frege; *Principia Mathematica* a lui Whitehead și Russell constituie pentru Bernays o amendare a poziției logiciste absolutiste, prin introducerea unor presupoziții suplimentare cum ar fi axioma infinitului etc.), care în plus mai este și „contrar manierei obișnuite de a proceda în matematică, care constă în a stabili teorii detașate pe cât de mult posibil de subiectul gânditor (*sujet pensant*)”[39].

Practic, pentru a concluziona în privința acestui punct atins de Bernays, intuiționismul nu se ridică la nivelul propriilor sale exigențe cu privire la ceea ce este evident în mod intuitiv. Chiar dacă articolul lui Bernays nu își propune deloc să dea o soluție sau o dezvoltare coerentă a poziției intuiționiste, ci se constituie într-o critică la adresa acesteia, se poate spune că într-un anumit sens posibilitatea unei „restrângeri” interne a intuiționismului (am putea să o numim și „auto-amendare” sau „auto-amputare”) este prezentă aici. Pe de altă parte, este vizată și pretenția de absolutizare a poziției intuiționiste la nivelul întregii matematici. Bernays – cel puțin în această fază de început a activității sale – este un moderat (este probabil și ceea ce l-a apropiat de poziția lui Hilbert), care apreciază că trebuie să existe un echilibru între evidență și abstractizare, între finit și infinit, și că metoda de investigație trebuie să se adapteze obiectului cercetat în fiecare dintre domeniile științei[40]. Corespunzând dualității (ireductibile) dintre aritmetică și geometrie, intuiționismul și platonismul ar reprezenta atunci două tendințe necesare și complementare în matematică[41], nefiind posibil a renunța la una dintre ele fără a afecta iremediabil edificiul matematicii. Rezultă de aici un „platonism moderat”[42].

Totuși, să menționăm că unele considerente sau presupoziții de același gen au fost formulate și înainte de articolul lui Bernays. Astfel, în 1927, chiar Émile Borel aprecia – aici în treacăt însă, fără a dezvolta această idee – că este o întrebare extrem de serioasă aceea dacă „trebuie să considerăm un număr ca fiind cunoscut în mod virtual atunci când calculul său este posibil din punct de vedere teoretic, dar solicită o cantitate de timp și de efort ce depășesc posibilitățile omenești”[43].

[38] Este ceea ce se numește „teoria subiectului creator” cu privire la poziția lui Brouwer față de cunoaștere în genere; a se vedea în acest sens articolul nostru „Conceptul de subiect creator și caracteristicile acestuia la L.E.J. Brouwer”, în *Revista de filosofie*, tom LXIV, 2017, 1, pp. 115–126.

[39] P. Bernays, „Sur le platonisme...”, p. 63.

[40] Vezi aici și Miriam Franchella, „Beth and Bernays on intuitionism”, *Philosophia Scientiæ*, tome 3, n° 4 (1998–1999), p. 137.

[41] P. Bernays, „Sur le platonisme...”, p. 66.

[42] Astfel de considerente ne-au determinat să îl încadrăm pe Bernays atât la 1), cât și la 3) în analiza tipurilor de discurs relativ la instanțierea finitismului strict pe care am schițat-o anterior.

[43] Émile Borel, „A propos de la récente discussion entre M.R. Wavre et M.P. Lévy”, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 34 (1927), p. 272.

Este poate mai puțin important exemplul pe care îl dă fiecare matematician sau filosof în parte pentru a arăta că există numere care nu pot fi calculate, deşi punctul de plecare al regulii de formare a acestuia este facil de vizualizat / construit. În acest caz, Borel arată că ne putem reprezenta uşor primele patru cifre zecimale ale numărului π (1415), dar că este extrem de greu şi nimeni nu a înfăţişat următoarele 1415 cifre zecimale ale aceluiaşi număr ş.a.m.d. El constată că, dacă am continua o asemenea procedură de o mie de ori, am ajunge să ne întrebăm dacă putem spune că acest număr poate fi calculat, de vreme ce am avea nevoie, pentru a-l obține efectiv, de „miriade de ființe umane", iar pentru a-l nota în scris, de „o cantitate de hârtie mult mai mare decât greutatea globului pământesc"[44]. Spre sfârşitul vieții, Borel va afirma chiar că „atunci când finitul devine foarte mare, el dă naştere aceloraşi dificultăţi ca şi infinitul"[45].

*

Cât priveşte *stricto sensu* denumirea de „finitism strict", introducerea acesteia se consideră că îi revine lui **Georg Kreisel** (1923–2015), într-o recenzie la *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* a lui Ludwig Wittgenstein[46], atunci când caracterizează astfel o parte a contribuțiilor originale ale acestuia din filosofia matematicii[47]. Kreisel apropie în această privință demersul lui Wittgenstein de cel al lui Bernays, apreciind că cei doi au deschis astfel drumul spre investigarea unui nou domeniu al fundamentelor matematicii[48]. Kielkopf preia ulterior termenul şi subsumează acestuia întreaga filosofie a matematicii a lui Wittgenstein, consacrând în acest sens un întreg volum[49].

Pe de altă parte, cum menționam anterior, **Hao Wang** (1921–1995), în cadrele unei concepții pluraliste şi complexe cu privire la matematică, preferă termenul de „antropologism" acolo unde Kreisel vorbea despre finitismul strict al lui Wittgenstein[50], dar extinde această semnificație la o poziție aparte în paleta şcolilor

[44] *Ibidem*.

[45] Apud M. Marion, *op. cit.*, p. 215.

[46] Georg Kreisel, „Wittgenstein's *Remarks on the Foundations of Mathematics*", *The British Journal for the Philosophy of Science*, Volume IX, Issue 34, 1958, pp. 135–158.

[47] Crispin Wright, „Strict Finitism", în idem, *Realism, Meaning and Truth*, Second Edition, Blackwell, Oxford, UK & Cambridge, USA, 1993, p. 107.

[48] G. Kreisel, *op. cit.*, p. 149.

[49] Charles F. Kielkopf, *Strict Finitism: an examination of Ludwig Wittgenstein's remarks on the foundations of mathematics*, Mouton, 1970. În viziunea lui Crispin Wright, Kielkopf greşeşte atât față de Wittgenstein, cât şi față de interpretarea lui Kreisel atunci când foloseşte eticheta de „finitism strict" pentru întreaga filosofie târzie a matematicii a lui Wittgenstein (C. Wright, *op. cit.*, 107). A se vedea în acest sens şi Mathieu Marion, *op. cit.*, în special pp. 213–236.

[50] Wang, raportându-se chiar la felul în care Kreisel caracterizase poziția matematică a lui Wittgenstein, va aprecia că termenul de „antropologism" (utilizat inițial de Bernays în 1935 în alt context) ar aduce în acest caz „ceva mai multă culoare" (*a bit more colorful*) (H. Wang, „Eighty Years of Foundational Studies", *Dialectica*, vol. 12 (1958), p. 474).

de analiză a fundamentelor matematice şi oferă o scurtă teoretizare a acesteia[51]. El trimite în acest context doar la remarcile critice ale lui Bernays amintite şi de noi şi la sugestiile conţinute de textele lui Wittgenstein. Concluzia sa este că „[a]ntropologismul nu preconizează o logică a staticului, ci a dezvoltării, a devenirii. Astfel, deoarece tratarea fructuoasă a omului ca maşină depăşeşte cu mult cunoaşterea şi înţelegerea noastră prezentă, antropologismul propune o tratare mai mult behavioristă sau fenomenologică decât fiziologică a gândirii matematice". În momentul în care scria articolul său, Wang aprecia că se deschide astfel un „câmp vag de cercetări cu totul diferite de logica matematică", deşi, cum precizam mai sus, direcţiile pot foarte bine să coexiste în viziunea sa. Pe de altă parte, Wang consideră că „[l]ogica intuiţionistă s-a putea dovedi aplicabilă la antropologism. Dar cine doreşte să adopte în mod consecvent poziţia antropologismului nu poate accepta formularea uzuală a calculului intuiţionist care permite formule arbitrar de lungi şi demonstraţii arbitrar de lungi"[52].

Dincolo de această menţionare istorică, menită doar a puncta o dată importantă în istoria finitismului strict, reamintim că vom reveni cu o analiză distinctă a relaţiei aparte pe care o putem identifica între gândirea matematicului la Wittgenstein şi orientarea de care ne ocupăm aici.

CONTRIBUŢIA LUI DAVID VAN DANTZIG

Un caz aparte în contextul discuţiei noastre îl constituie **David van Dantzig** (1900–1959), şi el amintit doar în treacăt de Cherubin şi Mannucci. Pentru van Dantzig, conflictul dintre formalism şi intuiţionism (acesta din urmă atât în sens de matematică – la Brouwer, cât şi de logică – la Heyting) reprezintă de fapt confruntarea sau competiţia dintre două modele alternative superioare („*tertiary or higher*") ale matematicii. Intuiţionismul propune un model mai complicat decât cel al formalismului (şi, de aceea, adăugăm noi, mai greu de manevrat), dar aproximează în schimb mai bine ceea ce se numeşte activitatea, „gândirea" matematică, mai exact este mai apropiat de ceea ce van Dantzig numeşte modelul primar şi cel secundar care caracterizează orice comportament ştiinţific în genere. De reţinut că ambele concepţii despre matematică sunt pentru van Dantzig două *modele* ale matematicii, ambele depărtate până la urmă de ceea ce înseamnă activitatea concretă a matematicianului (care presupune experienţa, observaţia etc.); contează apoi *perspectiva* din care sunt privite, ceea ce le conferă anumite avantaje comparativ vorbind[53].

[51] H. Wang, „Eighty Years...", pp. 473–476; Hao Wang, *Studii de logică matematică*, trad. de S. Vieru şi U. Morgenstern, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1972, pp. 45–47.

[52] H. Wang, „Eighty Years...", pp. 475–476; H. Wang, *Studii de logică matematică*, p. 47.

[53] D. van Dantzig, „General Procedures of Empirical Science", *Synthese*, vol. 5, nr. 9 (1947), p. 449.

În fapt, observațiile acestuia cu privire la distincția dintre finit și transfinit, apreciată ca neputând fi definită în mod operațional, îl conduc la concluzia că diferența dintre abordarea formalistă și cea intuiționistă din fundamentele matematicii este doar una graduală: „Niciun «intuiționist» din lume nu a «construit» realmente numărul 10↑10↑10 în conformitate cu definiția sa inițială, așa că acest număr are «doar» o semnificație «formală» pentru el, tot astfel precum numerele din clasa celor transfinite”[54], astfel că el ar trebui să respingă o bună parte din matematica intuiționistă. În afara unor excepții precum E. Borel, M. Fréchet și G. Mannoury, arată van Dantzig, matematicienii, logicienii și filosofii au considerat – în mod neproblematic – că putem accede la fundamente absolute ale matematicii. Or, în lumina celor menționate anterior, „această credință trebuie să fie caracterizată drept o iluzie. În mod special matematica intuiționistă nu poate fi apreciată în continuare ca fiind (absolut) «exactă», deși se poate spune despre ea că este «mai exactă» decât matematica clasică”[55].

În ceea ce privește propria sa propunere cu privire la matematică, van Dantzig este conștient că aceasta se constituie și ea tot într-un *model*, și chiar într-unul destul de aproximativ (*rough*) – nu este vorba deci de pretenția de a oferi descrierea „precisă” și „ultimă” a unei realități efective, „unice”. Dar, trebuie observat că un model care se situează pe sine – cum vedem – pe un anumit palier, în însăși schema interpretativă propusă, încadrează și evaluează totodată alte modele cognitive, el constituindu-se prin chiar aceasta într-un *meta-model*. Am putea chiar presupune că ne confruntăm în acest caz cu o dublă pretenție[56], aceea de a oferi un model atât metateoretic, cât și unul „concret” (dar în sensul cel mai larg cu putință). În plus, pentru van Dantzig însuși avem de-a face aici cu un *proces* dinamic, continuu, care nu poate fi redus la aceste elemente care devin ele însele niște abstracții folositoare unei explicații generale.

Schematic, acest proces al matematicii este redat de van Dantzig astfel: (1) Experiență → Uitare → (2) Amintire → Simplificare → (3) Observație → Suprimare (*Ellipsis*) → (4) Descriere → Regularizare → (5) Model → Pornire (*Switching on*) → (6) Formalizare → Absolutizare → (7) Inducție → Aranjare → (8) Axiomatizare → Deducție → (9) Extindere → Oprire (*Switching off*) → (10) Interpretare → Comportament inductiv → (11) Așteptare → Volițiune (*Volition*) → Acțiune[57].

Firește, nu putem avea deloc ambiția, dat fiind cadrul expunerii în care ne situăm, de a oferi și o înțelegere imediată ori detaliată a acestui model, chiar dacă descrierea oferită de autorul însuși ca bază a discuției nu este deloc una foarte

[54] D. van Dantzig, „Is 10↑10↑10 a Finite Number?”, *Dialectica*, vol. 9 (1955), p. 277.

[55] *Ibidem*.

[56] Am putea să ne întrebăm în ce măsură această dublă pretenție poate fi satisfăcută concomitent *în principiu*.

[57] D. van Dantzig, „General Procedures...”, p. 450.

extinsă[58]. Se observă însă cu uşurinţă cum termeni consacraţi din filosofia / metodologia ştiinţei sunt alăturaţi unor elemente să le spunem comportamental-psihologice – ceea ce oferă şi o resemnificare a acestora din perspectiva procesualităţii cunoaşterii. Pe de altă parte, trebuie subliniat cum o anumită fixare a finalităţii procesului cognitiv (în acest caz, *acţiunea*) determină implicit atât structurarea evolutivă a modelului în cauză, cât şi evaluarea anumitor modele concurente sau existente în peisajul cunoaşterii (intuiţionism, formalism etc.). Nu este lipsit de importanţă că, deşi modelul propus de van Dantzig vizează explicit (doar) „ştiinţa empirică" (care apare de altfel chiar în titlul articolului în care se desfăşoară acest demers teoretic), unde, fireşte, matematica joacă un rol, şi unul central, tocmai această finalitate va fi de regăsit şi în înţelegerea aparte a matematicii înseşi pe care, în siajul Cercului *Significa*, dar şi al intuiţionismului[59], el o vede ca ţinând de acţiune, efectivitate, realizabilitate, şi nu de ordinul „teoreticului". De altfel, van Dantzig îl şi citează în acest sens pe Brouwer cu privire la „înlocuirea scopurilor cu mijloace", *i.e.* a proiecţiilor pur teoretice cu ceea ce se poate realiza concret prin instrumentele cognitive posedate efectiv, acţiunea rezultată astfel reprezentând pentru el însuşi finalitatea activităţii ştiinţifice în genere[60].

În fapt, întreaga sa viziune despre ştiinţă este una influenţată de mişcarea *Significa*, de scrierile lui Mannoury în special. Van Dantzig se va delimita foarte clar de ceea ce putem numi o concepţie formalistă în această privinţă, subliniind că el înţelege ştiinţa ca reprezentând „un sistem de *activităţi umane* ce se deosebesc de alte activităţi umane printr-o observare atentă cazurilor în care acest termen este utilizat efectiv în limbajul curent" (sublinierea aparţine autorului). Este ceea ce el numeşte o atitudine „significală" (*significal attitude*)[61]. În aceeaşi notă, atunci când se discută despre limbaj ca fiind analizabil doar în termeni de sintaxă şi semantică,

[58] Pentru înţelegerea unora dintre termenii utilizaţi în această schemă de van Dantzig nu putem decât să trimitem chiar la textul său.

[59] A se vedea, pentru o desluşire teoretică mai bună a contextului general – teoretic şi istoric – specific acestui aspect, cu punctarea apropierilor şi deosebirilor dintre Mannoury şi Brouwer prin raportare la ideile vehiculate în Olanda în Cercul *Significa*, studiul lui Erik Heijerman, „Relativism and Significs: Gerrit Mannoury on the Foundations of Mathematics", în H. Walter Schmitz (ed.), *Essays on Significs. Papers Presented on the Occasion of the 150th Anniversary of the Birth of Victoria Lady Welby (1837–1912)*, John Benjamins Publishing Company, Amsterdam/Philadelphia, 1990, pp. 247–272.

[60] *Ibidem*, p. 449. Cu observaţia că aici „acţiunea" trebuie considerată într-un sens foarte general: „Chiar noi considerăm că o anumită acţiune constituie scopul oricărei investigaţii ştiinţifice, şi chiar dacă vedem justificarea unui model ştiinţific mai puţin în vreun criteriu formal al noncontradicţiei, consistenţei, verificabilităţii sau testabilităţii etc. decât în succesul (repetat şi regulat) al unor astfel de acţiuni, susţinem aceasta doar dacă termenul de «acţiune» este luat într-un sens foarte larg. Nu vrem să îl restrângem la acţiuni «practice» sau «tehnice», ci dorim să includem aici şi experimente ştiinţifice, precum şi acţiuni de felul celor care de obicei sunt numite «mentale», *e.g.* construcţii matematice sau logice" (*ibidem*, p. 454).

[61] *Ibidem*, p. 441.

sunt pierdute din considerare exact „cele mai importante elemente ale semnificării”, și anume „relațiile pe care cuvintele le au cu persoana care vorbește sau scrie (...), respectiv cu persoana care ascultă sau citește”, pe scurt elemente care sunt cuprinse în fenomenul *înțelegerii*[62].

Revenind la modelul amintit anterior, neluarea în seamă a tuturor etapelor evidențiate în acesta, sau minimalizarea anumitor etape, sau accentuarea excesivă numai a unora dintre acestea, duce la obținerea unor teorii trunchiate ale științei. Astfel, „[d]acă sunt supralicitate, procesele semantice, sintactice și logice 4, 6, 8, 9 conduc la o atitudine formalistă”. Un astfel de exemplu îl oferă Carnap, care „[î]n loc să folosească termenul «știință» așa cum se face în limbajul de zi cu zi, ca pentru un sistem de activități umane (sau ceea ce ele produc), în care cuvintele pot să apară sau nu, (...) îl restricționează la un sistem de cuvinte și simboluri, delimitat de condiții mai degrabă arbitrare și aprioristice privind «derivabilitatea», «verificabilitatea», «testabilitatea» etc.”[63].

Uneori astfel de demersuri științifice acționează chiar împotriva a ceea ce la prima vedere pare a defini propriul lor cadru fundațional – de exemplu, „empirismul logic”, care, în mod curios, observă van Dantzig, pe cât de multă atenție acordă logicii, pe atât de puțină o oferă empirismului de la care se revendică principial. Empirismul care lipsește aici este tocmai ceea ce ar trebui să se adauge unui sistem formal alcătuit în ultimă instanță din propoziții izolate. Oricât de „corect” (sau de bine alcătuit) ar fi acesta, legăturile dintre elementele care îl compun nu ar putea fi introduse decât de luarea în considerare și descrierea comportamentului cognitiv – *non-formalizabil* – în care oamenii interacționează în mod concret sau efectiv cu formațiunile lingvistice în cauză, *i.e.* în conformitate cu metoda folosită de cercul *Significa*.

Van Dantzig realizează separat și o abordare originală a principiilor intuiționiste, care presupune mai întâi o prezentare generală a demersului lui Brouwer[64]. El

[62] *Ibidem*, p. 442. Este interesant că van Dantzig trimite, pentru o prezentare cât mai fidelă a acestor aspecte, nu doar la scrierile lui Geritt Mannoury, ci și la un articol publicat anterior de Brouwer („Synopsis of the signific movement in the Netherlands. Prospects of the signific movement”, 1946) în revista *Synthese*, unde se regăsea și propria sa contribuție la care facem referire aici.

[63] *Ibidem*, pp. 454–455. Van Dantzig devine uneori acid relativ la pretenția formaliștilor de a oferi o privire asupra cunoașterii înseși – este luată în vizor afirmația aceluiași Carnap conform căreia cunoașterea este un sistem formal care este completat cu o anumită interpretare. E ca și cum, arată van Dantzig, am „defini «arta [plastică – n.n.]» ca fiind un catalog, completat cu un muzeu (în care *pot* fi agățate picturile)” (*ibidem*, p. 455).

[64] D. van Dantzig, „On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics”, în Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, *Proceedings of the section of sciences*, vol. 50 (1947), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, pp. 918–929, 1092–1103. Van Dantzig este conștient atât de ceea ce îl apropie, cât și ceea ce îl desparte pe alocuri de Brouwer. Legat de prezentarea „obiectivă” (termenul ne aparține) pe care dorește să i-o facă în primele pagini ale articolului invocat de noi, van Dantzig își exprimă îndoielile privind reușita descrierii sale, menționând însă că „am încercat să parafrazez (...) propriile idei ale lui Brouwer fără a lăsa să interfereze cu acestea opiniile mele întrucâtva diferite, cu excepția locurilor unde cele din urmă îmi păreau a fi în acord cu ale sale” („On the principles...”, p. 918).

pleacă aici de la observația, corespunzând propriei sale concepții de altfel, că matematica reprezintă pentru Brouwer „o parte a activității umane, și nu un sistem de cărți, teoreme, cuvinte sau simboluri. Aceasta este (nu *rezultatul* experienței umane, ci) o metodă de *a trata despre* (*dealing with*) experiența umană”[65].

El indică cu acest prilej mai multe cauze pentru care matematicienii au opus rezistență modului intuiționist de gândire: lipsa de eleganță a matematicii intuiționiste, care, de exemplu, utilizează mai multe noțiuni acolo unde cea clasică întrebuințează una singură sau care apelează la o terminologie și notații greoaie; aprecierea că o abordare constructivistă nu este necesară în matematică etc. Dar cea mai semnificativă dintre aceste cauze constă în relația care se stabilește în intuiționism între matematică și filosofie, coroborat cu faptul că în realitate mulți matematicieni „nu sunt interesați în mod deosebit de filosofie, și nici măcar de logică”[66], cu alte cuvinte nu au nicio preocupare cu privire la cercetarea fundamentelor propriei lor activități.

Este important de subliniat acest ultim aspect atins oarecum în treacăt de van Dantzig, întrucât, apreciem noi, el deschide spre câteva ipoteze de lucru care se impun a fi cercetate[67]: a) implicarea intimă a filosofiei în definirea premiselor intuiționiste de bază la Brouwer; dar și b) afinitatea dintre filosofie și intuiționismul matematic, mai precis a intuiționismului matematic în genere sau în sine (nu doar al celui propus inițial de Brouwer); la care se adaugă însă c) posibilitatea de a decupla „total” intuiționismul de filosofia lui Brouwer, care este deci independent de aceasta, obținându-se astfel o „matematică intuiționistă”. Altfel spus, chiar și mai pe scurt: Brouwer a fost și un filosof, nu doar un matematician; intuiționismul în genere este predispus în mod „natural” la prezența componentei filosofice; cu toate acestea, poate fi evidențiat un domeniu strict matematic al intuiționismului.

De altfel, ceea ce face și van Dantzig însuși în continuarea acestui studiu se circumscrie ultimului din punctele de mai sus, el schițând un sistem al matematicii afirmative, care însă a fost criticat din perspectivă intuiționistă, fiind definit ca strict „formalist” (Griss) sau apreciat a nu reprezenta deloc o „formalizare a matematicii intuiționiste” (Heyting)[68].

[65] *Ibidem*.

[66] *Ibidem*, p. 922.

[67] Primele două sunt prezente și problematizate în articolele noastre dedicate lui Brouwer în ultimii ani: „Paliere de analiză filosofică ale intuiționismului lui Brouwer. Concepția lui Brouwer despre comunicare și limbaj”, *Studii de Istorie a Filosofiei Universale*, vol. XIV, 2016, pp. 145–162; „Concepția lui Brouwer despre matematică din perspectiva unei analize filosofice a intuiționismului său”, *Revista de filosofie*, tom LXIII (2016), 6, pp. 761–776; „Logica, logica matematică și principiile logicii în viziunea lui L.E.J. Brouwer”, *Probleme de logică*, vol. XIX, 2016, pp. 55–60; „Conceptul de subiect creator și caracteristicile acestuia la L.E.J. Brouwer”, *Revista de filosofie*, tom LXIV (2017), 1, pp. 115–126.

[68] Cf. Alexandru Surdu, *Elemente de logică intuiționistă*, Editura Academiei R.S.R., București, 1976, p. 124. După cum notează critic și Al. Surdu, deși „este corect din punct de vedere formal”, sistemul lui van Dantzig „nu poate să ducă la obținerea unor rezultate *pozitive*, singurele care interesează din punct de vedere intuiționist” (*ibidem*).

Rămânând pe palierul filosofic al discuției, să notăm că gestul, să îl numim „hermeneutic”, al lui van Dantzig din 1947[69] față de poziția intuiționistă a lui Brouwer, punctat de noi în paragrafele precedente, se radicalizează ulterior. Astfel, într-un articol din 1949 în care analizează critic poziția lui Brouwer cu privire la proprietățile negative (formulată în 1948), van Dantzig prezintă, de la bun început, structura motivațională a „deconstrucției” acesteia, pe un dublu palier, presupunând fiecare o dublă subdiviziune, într-o amplificare evidentă a unei (potențiale, dar şi asumate de van Dantzig însuşi) contestabilități ştiințifice. Într-o primă fază se susține că validitatea afirmației lui Brouwer depinde de: 1) „felul în care anumiți termeni, nedefiniți în lucrare, sunt interpretați” şi 2) „anumite presupuneri, în parte de natură psihologică, care nu sunt menționate în mod explicit”. Apoi, van Dantzig afirmă că articolul lui Brouwer la care se referă: 3) „se bazează pe o filosofie idealistă, care cu siguranță nu va fi acceptată de toți cititorii, ceea ce îi va determina pe aceştia să o invalideze, cel puțin în primă instanță (*in appearance*)” şi 4) este redactat într-un limbaj care amestecă enunțuri „subiectiviste” cu altele „obiectiviste”[70], ceea ce poate conduce la o poziție inconsistentă.

Dacă primul palier este unul al „clarificării”, vizând mai degrabă ceea ce am putea numi „neatenția” (sau „neglijența”) în redactare / formulare, al doilea este unul al unei „amendări critice” ce se poate citi (şi) ca o delimitare – el priveşte până la urmă o raportare explicită la presupozițiile şi problemele (dacă nu chiar aporiile) implicate de tezele fundamentale susținute de Brouwer.

Oricum, van Dantzig îşi va propune în mod tranşant în acelaşi articol o „epurare” (termenul ne aparține) a contribuției lui Brouwer de elementele filosofice în vederea asigurării unei lecturi logiciste. În propriile sale cuvinte, el va urmări deci: „1) să dezlege rezultatul [matematic] de originea sa filosofică (*to loosen the result from its philosophical origine*); 2) să indice presupozițiile care stau la baza acestuia şi astfel 3) să îl facă mai uşor de înțeles pentru logicişti (sic)”[71]. Mai mult, el va urmări şi să ofere o dublă „traducere” a problemei în cauză, una strict „subiectivistă”, alta strict „obiectivistă” (sau „formală”)[72], care fiecare în parte să fie mai consistentă decât poziția inițială a lui Brouwer. Altfel spus, oricare dintre pozițiile între care Brouwer – conştient sau nu – oscilează, este de preferat în acest caz.

Fără a insista aici asupra acestei probleme[73], să notăm că van Dantzig observă, cu acest prilej, cu acuitate posibilele înțelesuri distincte care pot fi atribuite *subiectului creator*, menționat de Brouwer într-un text anterior, considerând în

[69] În fapt, articolul lui van Dantzig din 1947 reia un text redactat, dar nepublicat, din 1941.

[70] D. van Dantzig, „Comments on Brouwer's Theorem on Essentially-negative predicates”, Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, *Proceedings of the section of sciences*, vol. 52 (1949), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, p. 949.

[71] *Ibidem*.

[72] Termenii în cauză corespund, menționează van Dantzig, distincției datorate lui G. Mannoury dintre o terminologie „introspectivă” şi una „fizicalistă”.

[73] După cum am amintit deja, problema „subiectului creator” la Brouwer este abordată pe larg de noi într-un articol publicat anterior (vezi nota 38).

acelaşi timp că Brouwer însuşi nu este deloc clar în această privinţă. Astfel, el arată că subiectul creator poate fi identificat cu: „1) autorul însuşi, 2) un individ uman (ales) arbitrar, 3) un individ uman care posedă anumite (care?) aptitudini intelectuale, 4) un şir «infinit» de asemenea indivizi, care desfăşoară succesiv activităţile atribuite subiectului creator, 5) un grup mai mult sau mai puţin definit de indivizi umani, *e.g.* toţi matematicienii care posedă anumite aptitudini definite, sau orice altceva”[74]. Toate aceste interpretări implică până la urmă, după cum observă van Dantzig, „o ipoteză semi-empirică” (anume că va exista „întotdeauna” o fiinţă umană care să dorească şi să aibă capacitatea de a testa o anumită aserţiune matematică). Pentru el, cea mai consistentă interpretare din punct de vedere „subiectivist” este 1) cu completarea că „oricare individ uman care citeşte lucrarea [lui Brouwer], sau se gândeşte la aceasta, sau aude vorbindu-se despre aceasta etc. îl poate interpreta [subiectul creator] ca referindu-se la sine”[75]. Dar aceasta ar însemna, precizează van Dantzig, tocmai relativizarea conceptului de infinit, transpunerea sa în orizontul finitudinii proprii fiecărei fiinţe umane, ceea ce Brouwer nu ar fi acceptat totuşi. Este vorba aici exact de problema (principială am numi-o) a raportului pe care intuiţionismul, în particular cel al lui Brouwer, îl poate întreţine (sau nu) cu o viziune strict finitistă. Mai mult, pentru van Dantzig „subiectul creator” poate fi eliminat cu totul din discuţia în cauză, prin simpla substituţie generică a subiectului cu *produsul* activităţii sale[76], obţinându-se astfel o formă obiectivistă, acceptată nu doar de logicişti (previzibil), ci – în mod surprinzător – şi de intuiţionişti (dacă se omit însă raportările la meta-sistem, sintactic şi semantic)[77].

Pentru van Dantzig, în fundamentele matematicii (dar şi în toate celelalte ştiinţe) trebuie ţinut cont de „posibilităţile limitate ale minţii omeneşti şi ale dispozitivelor mecanice care o înlocuiesc pe aceasta”[78]. Din această perspectivă strictă, alături de alte exemple din istoria matematicii, chiar şi „subiectul creator” al lui Brouwer devine pentru el o entitate de genul unor „minţi superioare fictive” (*fictitious superior minds*)[79]. Raportarea critică a lui van Dantzig faţă de „subiectul creator” introdus de Brouwer nu se regăseşte însă doar la un nivel să îi spunem general-filosofic sau al fundamentelor matematicii, ci şi în conexiune strânsă cu unele probleme concrete ale matematicii, cum ar fi existenţa proprietăţilor (esenţial) negative susţinută de Brouwer.

[74] *Ibidem*, p. 950.

[75] *Ibidem*, p. 951.

[76] Al. Surdu constată aici un atac la adresa „subiectului creator” al lui Brouwer, de pe poziţii anti-intuiţioniste, care ar avea drept consecinţă în cele din urmă recuperarea interpretării platonice în privinţa entităţilor matematice (Al. Surdu, *op. cit.*, p. 95).

[77] D. van Dantzig, „Comments...”, pp. 956–957.

[78] Idem, „Is 10↑10↑10 a Finite Number?”, p. 273.

[79] Van Dantzig mai aminteşte aici de „inteligenţa” (numită cel mai adesea „demonul”) lui Laplace şi „demonul” lui Maxwell. Stenlund apreciază că se mai pot face şi alte adăugiri în acest context: „Această listă de exemple de «minţi superioare» ar putea fi făcută mai lungă: am putea include aici «intuiţia pură» a lui Kant, «intuiţia matematică» a lui Gödel şi, poate, capacitatea mentală de idealizare a lui Husserl care ne poartă dincolo de ceea ce el numeşte *lumea-vieţii* în domeniul obiectelor ideale” (*op. cit.*, p. 336).

Ceea ce nu înseamnă, pe de altă parte, după cum s-a putut vedea şi până în acest punct final al prezentării noastre, că van Dantzig nu îi este îndatorat în unele privințe lui Brouwer[80] (dar şi lui Mannoury), de exemplu chiar în felul în care înțelege activitatea matematicianului. Chiar dacă, aşa cum am remarcat, se delimitează de „subiectul creator" al lui Brouwer, pe care îl situează în arealul demersurilor de tip fundaționist-abstract în matematică, el apreciază că matematica nu reprezintă un *tip de cunoaştere* printre altele (unul posedând limbajul său specific), ci un *tip de gândire* care poate fi aplicat / regăsit în orice proces de gândire[81]. Această idee îl apropie de Brouwer, care, după cum am încercat să argumentăm în unele dintre articolele noastre pe care i le-am consacrat[82], prin reflecțiile sale cu privire tocmai la subiectul creator deschide posibilitatea înțelegerii matematicului ca un mod de a fi al gândirii umane în genere. De aceea, precum în cazul lui Brouwer, la van Dantzig matematicianul nu trebuie să apeleze la un referențial extern – ceea ce ar însemna atât o eschivare, cât şi o lipsă de înțelegere a înseşi esenței activității sale – atunci când este întrebat care este până la urmă scopul şi utilitatea pentru care învățăm matematica – de regulă considerându-se că matematica exprimă o dezvoltare a gândirii logice, care îşi găseşte aplicare în tehnică şi fizică[83].

BIBLIOGRAFIE

Paul Bernays, „Sur le platonisme dans les mathématiques", *L'Enseignement Mathématique*, vol. 34 (1935), pp. 52–69 (articolul, în forma sa anastatică, poate fi descărcat de la adresa: http://www.unige.ch/math/EnsMath/EM_en/; există şi o traducere în engleză a articolului, semnată de Charles Parsons, disponibilă la adresa: http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/platonism.pdf).

Émile Borel, „A propos de la récente discussion entre M.R. Wavre et M.P. Lévy", *Revue de Métaphysique et de Morale*, 34 (1927), pp. 271–276.

Émile Borel, *Les nombres inaccessibles*, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

Felice Cardone, „Strict Finitism and Feasibility", în Daniel Leivant (ed.), *Logic and Computational Complexity: International Workshop LCC '94, Indianapolis, IN, USA, October 13–16, 1994, Selected Papers*, Springer, Berlin / Heidelberg / New York, 1995, pp. 1–21.

Rose M. Cherubin şi Mirco A. Mannucci, „A Very Short History of Ultrafinitism", în J. Kennedy and R. Kossak (eds.), *Set Theory, Arithmetic and Foundations of Mathematics: Theorems, Philosophies*, 2011, pp. 180–199.

D. van Dantzig, „General Procedures of Empirical Science", *Synthese*, vol. 5, nr. 9 (1947), pp. 441–455.

D. van Dantzig, „On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics", în Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, *Proceedings of the section of sciences*, vol. 50 (1947), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, pp. 918–929, 1092–1103.

[80] Să nu uităm nici că van Dantzig a și participat în 1925 la unul dintre seminarele ținute de Brouwer la Universitatea din Amsterdam și că în anii 1920–1930 ai secolului trecut a făcut parte, alături (printre alții) de Brouwer şi Mannoury, din *Signifische Kring* (Cercul Significa).

[81] J.J. O'Connor și E.F. Robertson, „David van Dantzig", 2015, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dantzig.html, accesat la 11.10.2018.

[82] A se vedea nota 66.

[83] J.J. O'Connor şi E.F. Robertson, *op. cit.*.

D. van Dantzig, „Comments on Brouwer's Theorem on Essentially-negative predicates", Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, *Proceedings of the section of sciences*, vol. 52 (1949), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, pp. 949–957.

D. van Dantzig, „Is 10↑10↑10 a Finite Number?", *Dialectica*, vol. 9 (1955), pp. 273–277.

Michael Dummett, „Wang's Paradox", în idem, *Truth and Other Enigmas*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.,1978, pp. 248–268 (inițial apărut în 1970).

Miriam Franchella, „Beth and Bernays on intuitionism", *Philosophia Scientiæ*, tome 3, n° 4 (1998–1999), pp. 135–148.

Georg Kreisel, „Wittgenstein's *Remarks on the Foundations of Mathematics*", *The British Journal for the Philosophy of Science*, volume IX, Issue 34, 1958, pp. 135–158.

G. Kreisel şi M.H.A. Newman, „Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881–1966", *Biogr. Mems Fell. R. Soc.* 1969, vol. 15, pp. 39–68.

Mathieu Marion, *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

Jim Mawby, *Strict Finitism as a Foundation for Mathematics*, Submitted for a degree of PhD, September 2005, at Glasgow University (accesibilă la adresa http://theses.gla.ac.uk/1344/).

J.J. O'Connor şi E.F. Robertson, „David van Dantzig", 2015, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dantzig.html, accesat la 11.10.2018.

Charles Parsons, „Hao Wang as Philosopher", în Petr Hajek (ed.), *Gödel '96: Logical Foundations of Mathematics, Computer Science and Physics – Kurt Gödel's Legacy. Brno, Czech Republic, August 1996, Proceedings*, Springer, Berlin etc., 1996, pp. 64–80.

Sören Stenlund, „Different senses of finitude: An inquiry into Hilbert's finitism", *Synthese*, vol. 185 (2012), pp. 335–363.

Alexandru Surdu, *Elemente de logică intuiționistă*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1976.

Mary Tiles, *The Philosophy of Set Theory: An historical introduction to Cantor's paradise*, Blackwell, Oxford, UK / Cambridge, Mass., U.S.A., 1989.

A.S. Troelstra şi D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics: An introduction*, 2 volume, North-Holland, Amsterdam etc., 1988.

Hao Wang, „Eighty Years of Foundational Studies", *Dialectica*, vol. 12 (1958), pp. 466–497.

Hao Wang, *Studii de logică matematică*, trad. de S. Vieru şi U. Morgenstern, Editura Ştiințifică, Bucureşti, 1972.

Hao Wang, *Beyond Analytic Philosophy: Doing Justice to What We Know*, A Bradford Book, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts / London, England, 1986.

Crispin Wright, „Strict Finitism", în idem, *Realism, Meaning and Truth*, Second Edition, Blackwell, Oxford, UK & Cambridge, USA, 1993, pp. 107–175.

https://dexonline.ro/definitie/nenum%C4%83rat; accesat la 3.05.2018.