ELEMENTE DE FILOSOFIE WITTGENSTEINIANĂ A MATEMATICII ÎN SPAȚIUL IDEATIC AL ANILOR ’30

IULIAN GRIGORIU

Wittgenstein's philosophy elements of mathematics in the ideal space of the thirties. With the dispute between logic, formalism and intuitionism as a backdrop, Wittgenstein continues to develop his own philosophy of mathematics which he begins to present to the members of the Vienna Circle. At the 1930 Königsberg „Congress of Theory of Knowledge in the Exact Sciences”, he will have Friedrich Waismann as a spokeperson against Carnap (logicism), Heyting (intuitionism) and Neumann (formalism).

The critique of the fundamentals of mathematics, the expression of a general form of the proposition and of the natural number, the connection between the system, the proposition and the mathematical demonstration, the situation of the arithmetical calculation, the debates in the *Tractatus Logico-Philosophicus* and continuing in *Philosophical Remarks and Philosophical Grammar*, become recurrent themes and constitute central concepts of the Wittgensteinian philosophy of mathematics.

The question of universality in relation to the definition of the natural number reflects on an original Wittgenstein concept of general mathematical function, which emphasizes its peculiarities but also the difficulties of reception. In the continuation of the Intensionalist conception of the number I illustrate that Wittgenstein elaborates a formal grammar of the name of numbers, I rebuild the addition operation and I highlight a type of Wittgensteinian definition for the mathematical proposition. In order to achieve these goals, I draw the "coordinates" of a new conceptual space auspicious for the development of the Wittgensteinian philosophy of mathematics, namely the Grammatical Space. This follows the Tractarian Logical Space, which it encompasses and transforms, offering new linguistic and representative possibilities for the syntax of mathematical elements. "Mathematics" becomes an autonomous field of reason, it does not need fundamentals, it develops through independent concepts, specific constructions, punctual strategies, provisional, rules and internal laws, constituting a bridge between various human activities as a criterion for sciences and their applications.

Keywords: Wittgenstein's Philosophy of Mathematics; Grammar Space vs. Logic Space; demonstration; system; calculation; Wittgenstein's concept of function; number; mathematical domain; definition of the mathematical proposition

INTRODUCERE

Filosofia lui Wittgenstein este un imens joc de puzzle având ca piese concepte deschise, modificabile, care angrenează în sincope şi se completează la mari intervale, cu darul de a crea un dialog, o perspectivă inversă asupra scrierilor timpurii expuse unor noi determinări, extinderi, relevanțe, în lumina celor târzii.

Rev. filos., **LXVI**, *5*, p. 615–648, Bucureşti, 2019

În acest sens, o serie întreagă de concepte tractariene sunt înglobate și dezvoltate în filosofia ulterioară. Wittgenstein nu abandonează ceea ce a început în *Tractatus Logico-Philosophicus* (TLP) ori ceea ce a surprins între timp ca fiind un eșec, ci va proceda la „aruncarea scării”. Perioada de după *Tractatus* este strict legată și dependentă de aceasta. Filosoful citeşte operele unor Brouwer, Weyl, Skolem, Hilbert, Ramsey (întâlnindu-se şi discutând de mai multe ori cu Brouwer în 1928), îşi expune ideile în cadrul Cercului de la Viena, unde îi are ca susținători pe Waisman, Moritz, Schlick. După aproape un deceniu de meditații, impresia lăsată de filosofia sa de mijloc (începînd cu anii 1929–1930) este cea a unei replieri și reorientări către aceleași granițe problematice trasate deja. Totalitatea de „fapte constitutive ale lumii” (TLP) se transformă în alte elemente ireductibile, și anume într-o multitudine de „forme de viață” asimilate ca „jocuri de limbaj”. E vorba de o „viață” a semnelor ce dublează, reprezentaționează realitatea inefabilă. Știința, cunoașterea urmează să se raporteze la un domeniu distinct al rațiunii, *matematicul,* în măsură să organizeze datele noastre cantitative. Matematica e alcătuită din acțiuni directe, independente, nemotivate logic sau altfel. Pentru acest domeniu nu avem fundamente, ci alegeri, convenții și tehnici, nu obiecte și daturi, ci construcţii, strategii, dar nu universale, ci provizorii, operaționale, local aplicabile. În matematică eșecurile fundaționale au o motivație la fel de profundă ca și fundamentele înseși: cei care au avut pretenţia că ar fi explicat matematica prin logică, intuiţie, formalisme – orientări de filosofie a matematicii nu atât de „pure” pe cât s-ar crede – se iluzionează, greşesc. Necesitatea domeniului matematic e independentă de celelalte, ale logicului, formalului sau limbajului natural prin care se poate exprima conjunctural, dar deține gramatica sa proprie (legile aritmeticii, de pildă).

DE LA SPAȚIUL LOGIC LA UN SPAȚIU GRAMATICAL

Eliberarea matematicii de constrângeri formaliste, logiciste, intuiționiste (culegând totodată unele din valorile și principiile lor) devine fondul teoretic al noilor acțiuni filosofice wittgensteiniene de filosofia matematicii. Aceasta se va realiza pe alte „fundamente”, de tip reprezentaționist și intensionalist: e vorba de posibilitatea elementelor și procedeelor matematice de a ne apărea ca entități autonome evidente prin descriere, reproducere, reprezentare, constituire, redare, punere în scenă; „așa stau lucrurile” e valabil și pentru domeniul matematicului, ceea ce ar presupune un act de credință[1].

Pe de altă parte, fermenții tractarieni încep să se cristalizeze în noi concepte mai ferme și cu „bătaie lungă”: nu se renunță la critica și problematizarea specifică a fundamentelor, *forma generală a numărului* rămâne o temă perenă, se detașează o nouă viziune asupra *demonstrației*, a *propoziției* în genere și a celei matematice în special, a *sistemului* matematic; se impune acum un concept original de *funcție*

[1] În sens de „încredere” în funcționarea unor norme și forme ale propozițiilor și obiectelor specifice.

matematică generală, diferit de cel clasic, ca și o nouă viziune despre *număr* și *concept* ca elemente fundamentale ale matematicului și limbajului (totul în cheie reprezentaționistă și intensionalistă ca și în TLP). Am în vedere și deschiderea către problematica din ultima etapă a filosofiei wittgensteiniene a matematicii (FWM) având ca teme predilecte: statutul infinitului (mic și mare), rolul ecuațiilor (propozițiilor) matematicii, lipsa de relevanță a inducției și a cuantificării în domenii infinite, regăsirea unei forme generale a propoziției, critica susținută adusă teoremelor de fundamentare a numerelor reale (Dedekind, Cantor), combaterea demonstrației lui Skolem (cu elemente originale de calcul formal), coerența unor teorii asupra numerelor iraționale și complexe. Wittgenstein va reuși chiar o viziune filosofică superioară, consider, celei pe care se situează Gödel în celebra sa teoremă, printr-o relocare a relației dintre adevăr și demonstrabilitate în propriul sistem.

După Wittgenstein, *matematicul* cu aplicațiile sale are resursele de a fi privit în lumina unor elemente autoevidente. Dacă nu se întâmplă asta, e pentru că matematicienii, filosofii, cei care caută justificări semantice, metateorii etc. nu reușesc să le surprindă în lumina lor de fidelitate „simfonică” şi de expresivitate spirituală. Dacă *matematicul* nu rămâne la criteriul simplităţii, atunci el s-a abătut de la datul său. În fond, în matematică nu există nimic complicat, această aparenţă ţine de suprasolicitarea unui limbaj care ar trebui să se afle tot timpul într-un proces de clarificare. În matematică totul e vădit, făţiş!

Filosofia wittgensteiniană a matematicii caută să surprindă ca evidente articulaţiile celor mai simple sau ample situaţii şi fapte matematice şi critică eşafodajele tip „Principia Mathematica” (PM), perspectiva teoremelor de incompletitudine, cutumele teoretice privind noţiuni precum *infinitul, contradicția, adevărul, completitudinea, demonstrabilitatea* etc., căutând să epureze matematica de intruziuni nejustificate pe care limbajul convențional le permite. Fiindcă legătura conjuncturală dintre Matematic şi Lume este limbajul, consider că Wittgenstein caută acum resorturile „gramaticale” ale Matematicului, mutând elementele sale din Spațiul Logic tractarian (SL) într-un Spațiu Gramatical (SG[2]). Virtuțile acestui nou cadru au darul de a ne elibera de necesități logiciste, pe de o parte, oferind posibilului și alte dimensiuni decât cele predeterminate logic (în afara și dincolo de fundamente specifice), pe de alta, prezentând elementele matematicii într-un soi de indeterminare clarificatoare

[2] Aluzii la SG apar în multe locuri din scrierile apărute postum, când se discută despre caracteristici gramaticale ale sensului, dar termenul efectiv e folosit doar o dată (în *Philosophical Remarks* IX, §110). De asemenea, în manuscrisele dactilografiate („The Big Typescript: TS 213”, editori și traducători C. Grant Lukhardt și Maximilian A. E. Aue, Blackwell, 2005), conținând idei începând cu perioada întoarcerii la filosofie din anul 1929, se întâlnește sintagma „spațiu gramatical” în titlul unui scurt capitol („Bedeutung, der Ort des Wortes im grammatischen Raum”/ „Meaning, the Position of the Word in Grammatical Space”, pp. 26–29) în care prin mai multe exemple filosoful constată că sensul unui cuvânt depinde sau chiar este „locul” dintr-un „spațiu gramatical”. Conceptul de SG îl consider util în analiza gândirii filosofice wittgensteiniene, inclusiv de filosofia matematicii, de aceea îl folosesc ca reper în propria analiză. Menționez că termenul nu a fost valorificat în mod asemănător de exegeză. Ideea rândurilor de față este de a studia în ce măsură SG oferă resurse ale sensului în vederea „fondării”, dacă nu „fundamentării” domeniului matematic.

cu virtuți filosofice. Încercarea constă în a surprinde generalitatea și totalitățile matematicii activate de resursele lingvistice ale schimbărilor și diferențierilor conceptuale. SG nu e un spațiu canonic, precum SL, dar poate conține sintaxa ecuațiilor matematice. „Mutat" într-un SG, sensul unei entități matematice (număr, propoziție, ecuație etc.) nu mai este univoc, ci orice reprezentare posibilă e de fapt una corectă, fiind suficient ca elementul supus analizei să aibă *un* sens. De altfel nu mai e vorba de elemente pure, stabile, bine organizate. Totul are un cusur sau ascunde o falsă enigmă: chiar evidențele trebuie readuse în lumina înțelegerii. SG permite descrierea sensului sau non-sensului unei entități matematice; sensul ține de o posibilitate în SG, nu de necesitate, dar SG nu conține „toate posibilitățile", precum SL, ci *alte* posibilități, de altă natură decât logică: e mai degrabă un spațiu al echivalențelor de reprezentaționare; „forma generală de aplicație a aritmeticii", nemaifiind determinată de o necesitate de tip logic, e practic imposibilă, ne asigură filosoful[3]. Într-un asemenea spațiu para-simbolic, regulile cu cifre funcționează independent de fundamentări, definiții și aritmetica e necontradictorie, precum geometria:

„Se poate fără îndoială spune că regulile cifrelor presupun întotdeauna definiții. Dar în ce sens? Ce înseamnă să spui că un semn presupune un altul care, strict vorbind, nu se află deloc acolo? Aceasta presupune posibilitatea; posibilitatea lui în spațiul semnelor (în spațiul gramatical)."[4]

Matricele de valori de adevăr din SL prin care se exprimă operațiunile logice (*și*, *sau*, *nici* etc.) sunt doar o parte a gramaticii lor; deci SL este inclus în SG[5].

Totuși, atributele unui SG sunt dificil de depistat din întregul filosofiei wittgensteiniene (un spațiu multiplu care să permită analiza și a propozițiilor din limbaj natural, și a celor logice și matematice), și probabil că filosoful a refuzat să instituie un nou spațiu dogmatic și iluzoriu, numai pentru a pune pe seama „gramaticului" toate problemele de care s-a lovit până acum. Cu toate acestea, dacă gramatica (regulile interne ale limbajului) permite să vorbim și să nu vorbim în aceeași măsură de o anumită entitate (de pildă, propoziția matematică sau forma generală a propoziției), ea nu e interzisă de la contradicție, după cum se poate constata când Wittgenstein fie admite, fie nu admite posibilitatea discuției despre o *formă generală* (în aceeași manieră tractariană).

Lipsa de aderență a oricărui concept vizat drept cadru al filosofiei ne duce cu gândul la imposibilitatea de a ne debarasa de metafizică. Reflexul tractarian de a epura limbajul filosofic de intruziunile metafizicii, de fundamente logiciste şi metateorii acum se răsfrânge asupra tehnicilor formaliste, convențiilor intuiționiste (se vede că acestea au virtutea de a se întoarce unele împotriva altora). Dar de toate acestea ne putem lipsi, după cum, la fel de bine, putem face apel la ele. Ne interesează doar funcţionarea elementelor ca atare, în domeniul matematic, cum sunt propoziţiile, demonstraţiile, calculele, cum se poate să existe de sine stătător,

[3] Cf. Ludwig Wittgenstein, *Philosophical Remarks* (PR), ed. R. Rhees, trad. Raymond Hargreaves și Roger White, Basil Blackwell Oxford, 1998, IX, §110.

[4] *Ibidem*.

[5] E ceea ce se spune implicit în PR VIII, §83.

în mod necontradictoriu, fără convenții și formalisme. Nu e vorba nici de realism, nici de antirealism, de metafizică sau antimetafizică. Matematica e o construcţie, ne spune Wittgenstein pe linie intuiționistă, cu reguli stabilite de practica matematică, privită ca o multitudine „pestriţă" de tehnici concrete (jocuri de limbaj).

Dacă în filosofia limbajului semnificaţia propoziţiei este determinată de folosirea ei, tipic FWM este că simbolismul matematic prilejuieşte corelaţia dintre faptul matematic şi reprezentaţionarea lui, existenţa unui obiect matematic e unică și simbolul constituie „esenţa" sa; simbolul, definiţia, arată însuşi obiectul matematic. În propoziţiile matematicii e dată direct corelaţia dintre obiect şi concept, cu sensul și alternativele de alegere a sensului, incluse.

Wittgenstein foloseşte o metaforă deosebit de sugestivă: „Putem să ne imaginăm propoziţia matematică precum o fiinţă vie care ştie ea însăşi dacă e adevărată sau falsă (faţă de propoziţia propriu-zisă). Propoziţia matematică ştie ea însăşi că este adevărată sau că este falsă. Dacă ea tratează despre toate numerele, înseamnă că ea deja trebuie să cuprindă toate numerele. Ca şi sensul său, trebuie de asemenea ca adevărul şi falsitatea să fie în ea."[6]

Ideea unui SG e cea a unui spațiu care conține posibilități necunoscute ale sensului, dar și un spațiu depozitar al experienței, un spațiu al memoriei.

CONTINUITATE ȘI TRANSFORMĂRI

O serie de exegeţi[7] constată că în FWM există o continuitate de preocupări, iar periodizarea ei (de la TLP la perioada aşa-zis mijlocie, 1929–1933 şi mai departe a treia perioadă, până în 1944) e utilă pentru a marca evoluţia gândirii wittgensteiniene.

Transformările care apar acum sunt cele conform cărora:

– nu mai există o formă generală comună tuturor numerelor şi nici demonstraţiilor. În ce priveşte numerele, Wittgenstein se „desprinde" de *forma generală* a de tip logic a numărului, înlocuind Spaţiul Logic cu un Spaţiu Gramatical. Aici, numerele se manifestă în genere ca *reguli* sau *legi* diferite și nu mai stau sub cupola aceluiași formalism. În ce priveşte demonstraţiile, diferenţele logice dintre acestea sunt de natură internă (intensionalistă) şi sunt la fel de diferite precum structura tipurilor de numere[8];

[6] *Ibidem*, XI, §122.

[7] De exemplu, Wrigley, *The Continuity of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, ed. K Puhl, Vienna: Verlag Hölder Pichler Tempsky 1993, pp. 73–87, care pune accent pe activitatea descriptivă a FWM, ca înţelegere a matematicii aşa cum este – filosofia nu poate avea repercusiuni asupra matematicii. Asemănător se exprimă A. Kenny (în vol. *Wittgenstein*, cap. 12, „The Continuity of Wittgenstein Philosophy", Blackwell Publishing, 2006, pp. 173–183) ş.a.

[8] În această manieră discută Wittgenstein în *Philosophical Grammar* (PG), ed. Rush Rhees, trad. Anthony Kenny, Blackwell, 2004, part. II, V, etc.

– filosoful austriac nu mai aşază aritmetica la baza întregului edificiu matematic, numărul nu mai constituie un concept matematic fundamental al aritmeticii şi al întregii matematici[9];

– în ce priveşte natura infinitului, Wittgenstein arată prin numeroase exemple că nu există un concept coerent de infinit[10] cu relevanţă asupra „organizării” numerelor reale, a „infiniţilor mici”, operabil în cadrul unei așa-zise teorii a mulţimilor, nici în cadrul respectării unor reguli cu pretenție de universalitate, în calculul unor serii și funcții infinite etc.

DEMONSTRAȚIA

Faţă de TLP, filosoful respinge că demonstraţia este un simplu calcul, considerând că aceasta creează noi legături conceptuale, accentuând faptul că matematicianul e un inventator, nu un descoperitor[11]: „Demonstraţia schimbă gramatica limbii noastre, ne schimbă conceptele. Ea face noi conexiuni şi creează conceptul acestor conexiuni”[12]. Aceste noi conexiuni ţin de faptul că matematica este o invenţie, o construcţie.

E o „schimbare” pe același calapod reprezentaționist tractarian și acum se vizează o sinteză între propoziție și demonstrație: „Dacă vrei să ştii ce este demonstrat, priveşte la demonstraţie”[13]; sau „o propoziţie matematică este o aluzie la o demonstraţie”[14].

Cele două mari tipuri de demonstraţii pe care le distinge (și critică) Wittgenstein pe tot parcursul FWM se conturează acum: e vorba despre demonstraţiile particulare, aritmetice sau numerice[15] şi cele recursive şi prin inducţie (având un istoric pe linia Leibniz-Poincaré-Russell).

În ultima perioadă a creaţiei sale filosofice, în *Philosophical Investigation*[16] (scrisă între 1946–1948), deci după ce a încetat să mai scrie la filosofia matematicii (1944), Wittgenstein îşi manifestă încrederea în puterea demonstraţiei încadrată

[9] *Ibidem*, part. II, III.

[10] L. Wittgenstein, (PR) XII, §123, §125–129, §136, §138, §140–142 etc.

[11] *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of mathematics* (LFM), ed. Cora Diamond, (prima ediție Cambridge 1939), the Harvester Press Ltd, 1976, Cap. I, p. 22 și urm. și *Remarks of the Foundation of Mathematics* (RFM), ed. G.H. von Wright, R. Rhees și G.E.M. Anscombe, trad. G.E.M. Anscombe, Basil Blackwell, Oxford, (1956) 1998, part. I, §168.

[12] L. Wittgenstein, RFM, part. III, §31. Wittgenstein discută despre noile concepte introduse de o demonstrație în RFM, part. III, § 29, 30, 31.

[13] L. Wittgenstein, PG, part. II, V („Demonstrația matematică”), §14, p. 369.

[14] L. Wittgenstein, PR XI, §122, XIII, §154: „O propoziţie matematică spune întotdeauna ceea ce demonstrează demonstraţia sa. Adică: ea nu spune niciodată mai mult decât demonstrează demonstraţia sa” (PR XIII, §154).

[15] De tipul 2+2=4, $(x+y)^2 = x^2$+2xy + y^2 etc.

[16] L. Wittgenstein, *Philosophical Investigation* (PI), ediţia a treia, trad. G.E.M. Anscombe Oxford, Blackwell Publishing, 2001.

într-un nou spaţiu, lingvistic („Lasă folosirea cuvintelor să te înveţe sensul lor... lasă demonstraţia să te înveţe ceea ce era de demonstrat”)[17].

Demonstraţia este corpul propoziţiei matematice: astfel, „propoziţia matematică complet analizată este propria sa demonstraţie”[18]. Reprezentaţionist, s-ar putea spune că demonstraţia joacă rolul organelor interne, structura, sistemul, încărcătura intensionalistă, iar propoziţia matematică este ceea ce *se vede*, rezultatul demonstraţiei. Wittgenstein are obiceiul să conceapă graniţe: ale limbajului, ale gândirii, ale propoziţiei etc.; propoziţia matematică apare ca o astfel de graniţă, fiind ceea ce iese vizibil din corpul demonstraţiei, sau ultima verigă a unui „lanţ de demonstraţii” sau a unui „sistem matematic”[19].

„Am putea spune aşa: propoziția matematică complet analizată este propria sa demonstrație. Sau așa: o propoziție matematică este doar suprafața imediat vizibilă a unei demonstrații întregi și această suprafață este limita cu care ne confruntăm. O propoziție matematică – spre deosebire de o propoziție reală – este în esență, ultima legatură într-o demonstrație care o face vizibil corectă sau greșită. O propoziție matematică este în legătură cu demonstrația sa așa cum o suprafață exterioară a unui corp se află în legatură cu corpul în sine. Am putea să vorbim despre corpul demonstrației ca aparținând propoziției. Numai presupunând că există un corp în spatele suprafeței, propoziția are o semnificație pentru noi. De asemenea spunem: o propoziție matematică este ultima legătură în lanțul unei demonstrații.”[20]

Demonstraţia (fazele demonstrației) asemănată cu formulele reacțiilor chimice sau, de ce nu, algebrice devine corpusul propoziţiilor matematice, ea le determină sensul[21], este parte a propoziţiei; propoziția matematică nu poate fi separată de demonstrația ei[22].

SISTEMUL

O propoziţie matematică trebuie înţeleasă în *sistemul* său, conceptul de „sistem” anticipând pe cel de „joc de limbaj”. Avem astfel de-a face cu sistemul euclidian, neeuclidian, sistemul numerelor cardinale, raţionale, reale şi altele. O propoziţie matematică se înţelege (are sens) în interiorul sistemului său. În acelaşi timp, fiecare propoziţie matematică trebuie să aparţină unui sistem sau calcul[23], orice demonstraţie nouă a unei propoziţii are loc într-un nou sistem[24].

[17] *Ibidem*, part. II, §11, p. 220.
[18] L. Wittgenstein, PR XIII, §162.
[19] *Ibidem*.
[20] L. Wittgenstein, PR XIII, §162.
[21] L. Wittgenstein, LFM part. IV, p. 39, PG, part.II, V, p. 369, p. 375 (în *op. cit*.), RFM, part.IV, §10.
[22] L. Wittgenstein, RFM part. VII, §70.
[23] *Ibidem*, part. VII §74, part. VI §11.
[24] *Ibidem*, part. VI §10, part. VII §70.

Un calcul cu semnificația semnelor folosite este determinat de un sistem de reguli interne. Faptul că anumite rezultate nu sunt posibile în acel sistem arată că nu se poate vorbi despre ele (în stil tractarian), că nu putem căuta dincolo de ceea ce este deja stabilit. Este dezavuată din nou teoria tipurilor, sistemele ierarhizate, e invocată pierderea de sens în așa-zisele treceri de la un sistem la altul, în faptul de a „căuta" un sistem mai larg înglobant. Exemple preferate: cazul stării de fapt a imposibilității de a trisecționa un unghi cu rigla și compasul în geometria euclidiană[25], imposibilitatea de ierarhizare a demonstrațiilor, a obținerii unei unități metamatematice tip PM: „Un sistem este o serie de forme, și operațiile care produc succesiv membrii săi sunt în mod adecvat descrise de regulile sistemului"[26].

Operatorul lui Sheffer este un sistem simbolic de forma p/q, care deţine „multiplicitatea necesară", aşa încât cu ajutorul său să poată fi exprimate toate propoziţiile de tip logic; despre aceste „sisteme" discută Waismann: „în matematică avem de-a face cu sisteme"[27] care determină sau formează *sensul* în matematică. Sistemul mai este cadrul care dă sens căutării unui răspuns matematic, restrânge spațiul infinit al căutărilor[28].

CALCULUL

În TLP, întreaga matematică se bazează pe calculul aritmetic cu numere; numărul reprezentaţionează o relaţie internă a unei serii de forme, aşa cum va fi şi în filosofia de „mijloc". Calculul aritmetic e un sistem combinatoric de operaţii, forme şi ecuaţii, ideea fundamentală a matematicii fiind ideea de calcul bazat pe acţiunea unei operaţiuni. Wrigley[29] constată că pentru FWM din perioada de mijloc, calculul este liantul relaţiei dintre sens şi demonstraţie matematică; într-un calcul, o propoziţie matematică este o ecuaţie având ca termeni două expresii care sunt echivalente cu nişte combinaţii complexe de forme şi operaţii[30].

Wittgenstein surprinde în stil reprezentaționist și intensionalist, pe tot parcursul FWM, diverse legături dintre propoziția și operația matematică, structura internă a numărului, tranziția între sisteme matematice dotate cu diferite tipuri de calcul. Operațiile matematice se aplică în diverse combinații asupra unor forme de bază (axiomele matematicii). Un calcul e definit prin mulțimea de combinații generate de forme de bază și operații conținute în el. Un sistem de calcul se află în spatele oricărei propoziții matematice și îi conferă un sens.

[25] L. Wittgenstein, PR XIII, §152.

[26] *Ibidem*, XIII, §154.

[27] Friedrich Waismann, *Wittgenstein and the Vienna Circle*, (WVC), ed. B.F. McGuiness, Oxford, Basil Blacwell, 1979, p. 217.

[28] L. Wittgenstein, PR XIII, §150.

[29] M. Wrigley, „The Continuity of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", în *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna, ed. K Puhl, 1993, pp. 73–87, p. 81.

[30] L. Wittgenstein, PR XV, §174, PG, part.II, V, p. 377 și urm. în *op. cit.*

Surprinderea sensului este esențială în demersul constructiv și demonstrativ al matematicii, în măsura în care teoremele matematice au pretenția de a furniza rezultate generale sau valabile pentru „toate numerele" avute în vedere. Astfel, noi am putea să depistăm un sens în exigența teoremei lui Fermat pentru un număr finit de numere prime între ele, dar, în general, să nu surprindem un sens al generalității teoremei. Aspectul reprezentaționist al calculului e o constantă a FWM: găsirea evidenței unei continue prezențe a imaginii calculului pentru fiecare propoziție a matematicii e un imperativ.

*

Alte preocupări ale perioadei de mijloc a FWM vin pe linia TLP, în ideea că filosoful renunță la unele concepte (cum sunt cele de „substanța lumii", „fapt", „stare de lucruri" etc.), pe altele le transformă – SL va deveni SG, pe altele le preia și dezvoltă (conceptul de „sistem" din TLP e suveran vizavi de semnificația elementelor sale, cele de „regulă", „lege", „operațiune", „realitate", „posibilitate" se dezvoltă independent de atributele logiciste), filosoful aduce alte concepte proprii sau se preocupă de noi concepte aflate în circuitul filosofic.

O parte a exegezei caracterizează faza intermediară a FWM (1929–1933) ca pe o schimbare de fundal: de la criticile, observaţiile şi interpretările aduse teoriilor unor Frege, Russell, acum atenţia lui Wittgenstein se îndreaptă către filosofiile la modă, cu care intră în polemică: e vorba de intuiţionismul lui Brouwer şi Weyl, formalismul lui Hilbert, forma modificată de logicism al lui Ramsey ş.a. Continuă preocupările asupra demitizării fundamentelor, interpretarea propoziției generalizate, deliberează asupra coerenţei unui sistem axiomatic, regândește statutul demonstraţiei prin inducţie, caută clarificarea conceptului de număr real. Pentru ca în ultima perioadă a FWM meditațiile lui Wittgenstein să se îndrepte către cum se încadrează *matematicul* în limbaj, cum pot fi analizate proprietățile propoziţiei matematice într-un *spațiu gramatical* conceput ca bază a matematicului.

CONTEXTUL IDEATIC AL ANILOR '30

Un punct de cotitură în afirmarea lui Wittgenstein ca filosof al matematicii, în legătură și cu raporturile sale cu membrii Cercului de la Viena, în contextul întregii dezbateri filosofico-matematice a vremii, consider că este „Congresul de Teorie a cunoaşterii în Ştiinţele exacte" de la Königsberg din septembrie 1930. El reprezintă un „punct de acumulare" pentru filosofia matematicii de la acea oră şi a avut ca principali protagonişti pe Carnap (logicism pe linia Frege-Russell-Whitehead), Heyting (intuiţionism pe linia Brouwer-Weyl), Neumann (formalism pe linia lui Hilbert).

La Congres, cei sus numiţi au prezentat conferinţele: *The logicistic grounding of mathematics, The intuitionist grounding of mathematics*, respectiv *The formalist* *grounding of mathematics*[31]. Pe lângă aceşti autori, a conferenţiat Friedrich Waismann[32] despre fundamentele matematicii în concepţia lui Wittgenstein: *Über das Wesen der Mathematik; Der Standpunkt Wittgensteins*, rămasă nepublicată. E vorba în special de o critică a logicismului, fără a se propune o reală alternativă la celelalte curente, după cum se arată în WVC[33]. La acelaşi Congres, Kurt Gödel îşi prezintă unele rezultate preliminare ale teoremelor sale de incompletitudine. Ne putem face o imagine despre conturarea unei FWM în contextul acestor dezbateri, sintetizând punctele de vedere din textele inedite ale anilor '30 conform surselor disponibile[34]; e vorba de problematica avută în vedere de Wittgenstein în discuţiile cu Waismann şi Schlick care ulterior se cristalizează mai ales în PR şi PG: logică şi aplicaţiile sale, metalogică, generalitate, regulă, semnificaţie, spaţiu vizual, vedere sinoptică, adevăr, cauzalitate, gramatica regulilor, inducţie, inferenţă, reprezentare, act mental, idealism, realism şi altele. Tipul de abordare concură la o anume conduită în analiza tuturor acestor subiecte de filosofie a matematicii pe care l-aş putea numi *fenomenalism*, axat pe ideea că nu există nicăieri nici o esenţă de cunoscut, și are două braţe: unul maieutic (de critică) şi altul reprezentaţionist (de instituire-înlocuire a teoriilor[35]). Fiindcă demonstraţiile de tip inductiv şi recursiv, teoriile lui Cantor, Dedekind, Peano, Gödel, au un pronunțat caracter formal, Wittgenstein propune varianta lui de tip reprezentaționist-fenomenalist, în care matematic lasă lucrurile aşa cum sunt, însă, în fond, ele suferă o transmutaţie indelebilă: nimic nu mai rămâne la fel după ce filosoful vienez ne arată că tot acest efort al fundamentării matematicii este în van, iluzoriu. În „maşina" gândirii lui Wittgenstein s-au dezmembrat deja teoriile de tip fundaţional, „Principia Mathematica", și urmează metalogica, metamatematica, demonstraţiile tip Gödel, realismul, ca şi antirealismul deopotrivă. Acest mod de a filosofa conține idei și probleme tractariene, integrând TLP ca parte a unei repoziționări, dar și a continuității de preocupări privind concepţia generală despre funcţie, număr, regulă, gramatică, calcul, joc de limbaj.

La Congresul de la Königsberg, împotriva logicismului, Waisman[36] va fi trebuit să susțină că logica folosește concepte de tip gramatical, fără ca ea să posede

[31] Toate conferințele apar în *Philosophy of Mathematics*, ed. Benacerraf & Putnam, Cambridge University Press, 1983, pp. 41–52, 52–61, resp. 61–66.

[32] Waismann fusese purtătorul de cuvânt al lui Wittgenstein la Conferinţa internaţională de la Praga (1929), ca şi cu ocazia reuniunilor curente al Cercului de la Viena.

[33] WVC p. 102 și urm., p. 213 și urm.

[34] A se vedea *Dictées de Wittgenstein à Friedrich Waismann et pour Moritz Schlick, Textes Inédits, années 1930*, traducere din limba germană după texte transcrise plecând de la materiale dictate de Wittgenstein lui Fr. Waismann și Schlick, Presses Universitaires de France, 1997 (DDWS); *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle*, cu notele lui F. Waismann, Oxford, Blackwell, 1979 (WVC); Grattan Guinness, *The Search for Mathematical Routs, 1870–1940* Princeton University Press, 2000, 9.2.1, 9.2.2; Mathieu Marion, *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1998, cap. 2, p. 36.

[35] În termenii lui S. Körner, *Introducere în Filosofia Matematicii*, trad. Al. Giuculescu, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti 1965, cap. VIII, 5, „Matematica și Filosofia".

[36] Conform surselor enunțate.

un limbaj propriu; calculul logic-operațional ține de un tip de limbaj impropriu ce nu poate fundamenta noțiunea de număr. Acest fapt coroborat cu teoria mulțimilor (bazată pe conceptul clasic de funcție, concepută ca o relație între liste finite) arată că nu se poate obține o lege de maximă generalitate, deci niciun concept general de număr. Asemenea legi nu pot fi desprinse fiindcă avem de-a face cu lucruri diferite; în logică nu putem avea și obiectul și descrierea obiectului; încercarea de a da o descriere cu aer de regulă generală în locul unei enumerări a elementelor unei mulțimi e un nonsens; nu există o formă logică generală care să surprindă orice aplicație concretă posibilă[37].

În aceeași perioadă, Waisman notează o serie de considerații din partea lui Wittgenstein asupra formalismului: acesta e creditat cu o presupunere justă, dar și cu una greșită. Presupunerea justă e că orice sintaxă poate constitui un sistem de reguli, nu numai în matematică, ci în orice limbaj formal. Ideea proastă a formalismului e că semnele ar avea semnificație de sine stătătoare într-o sintaxă, pe când semnificația lor e chiar jocul formal ca atare. Simbolurile nu se pot detașa din sintaxă fiindcă limbajul nu poate justifica sintaxa în afara jocului stabilit.

Wittgenstein ia ca exemplu jocul de șah. Totalitatea regulilor de joc determină „locul logic" al pieselor asimilate unor variabile formale: x, y, t ... Aici, o mutare nu ține de fizică, ci de gramatica jocului, stabilită convențional (nemotivată, „așa stau lucrurile!") și fără să poată fi detașată de joc. Piesele nu au vreun sens în afară. În aceeași situație se găsesc numerele, așa cum a sesizat Frege, consideră Wittgenstein, că în genere simbolurile matematicii nu sunt semne: sensul lui „0+1" e diferit de cel al lui „1", cu toate că ce se află între ghilimele are aceeași semnificație. Impasul lui Frege a constat în a crede că fără a avea sens, simbolurile matematice trebuie să aibă o semnificație, altfel rămân „simple semne de cerneală pe hârtie". Or, Wittgenstein ne arată o a treia cale: simbolurile au semnificație exclusiv în cadrul regulilor stabilite arbitrar de jocul matematic respectiv, nu de sine stătătoare.

Cu aceasta, matematica nu devine o „filosofie a limbajului", ci se delimitează ca *analogon*: așa cum limbajul presupune o gramatică, numerele au nevoie de o aritmetică și, cu asta, se separă filosofia limbajului de filosofia matematicii[38].

Relația dintre cele trei mari curente din filosofia matematicii (logicism, formalism, intuioținism), socotind și FWM printre ele, poate fi considerată una mai profundă, bazată pe afinități filosofice de substanță, cu rădăcini în filosofia antică (platonism, aristotelism), a Evului Mediu (cearta universaliilor) și în perioada modernă (cartezianism, kantianism). Intuiționismul e premergător și îl inspiră pe Wittgenstein în filosofia sa, atunci când acesta îl ia ca aliat împotriva celorlalte curente, formalist și logicist, când abordează teme precum relația dintre limbajul

[37] De aici ar trebui să rezulte un sens al poziționării teoretice, dar și al progresului în matematică, un parcurs marcat de anumite manifestări particulare formale, susceptibil de noi altitudini, imposibil de prevăzut.

[38] „Tipurile de numere pot fi diferențiate numai prin regulile aritmetice referitoare la ele" (L. Wittgenstein, PR X, §108).

matematic și cel natural, rolul construcției și al intuiției în matematică și pot fi depistate și alte teme comune. Totuși, FWM se dezvoltă în paralel cu toate celelalte curente, ca altă construcție spirituală (dar și cu elemente tehnice) de filosofia matematicii. Dincolo de rădăcinile comune, FWM propune alte „intuiții" sau „anti-intuiții", cărora le contrapune o percepție de tip reprezentaționist (în legătură cu formalismul), socotind actul matematic ca pe un act de „credință" față de situații contingente. Pot fi invocate de asemenea diferite afinități ale FWM cu fenomenologia și chiar existențialismul. În genere, Wittgenstein nu consideră necesar să se exprime asupra lucrurilor cu care este de acord sau le preia din alte filosofii. În ce privește intuiționismul, consider că prin critica adusă demonstrației lui Skolem a tranzitivității operației de adunare, FWM se opune indirect și teoriei demonstrației a lui Brouwer bazată pe „principiul silogismului"[39].

*

Ceea ce se contura în anii '30 ca o desprindere a FWM de logicism, formalism şi intuiţionism, va fi asimilat ulterior „anti-platonismului"[40], „verificaţionismului"[41] şi ulterior „constructivismului" (conform acelorași exegeţi). În ce constă acest alt fel de filosofie a matematicii pe care îl practică cu obstinaţie Wittgenstein? E vorba de o autentică filosofie a matematicii sau numai de consideraţiuni marginale? După Marion şi Frascolla, e vorba de o autentică şcoală de filosofie a matematicii wittgensteiniană, cuprinzând iniţial pe unii membri ai Cercului de la Viena şi apoi discipoli care urcă până în ziua de azi[42]. Disputa dintre cele trei curente de filosofia matematicii din acei ani e punctată de unele momente-cheie dintre care amintesc articolul lui Brouwer din 1912 , *Intuitionism and formalism*[43], unde se lansează o polemică cu formalismul lui Hilbert, în această discuţie antrenându-se în timp alături de Brouwer şi Hilbert, Weyl, Gentzen, Gödel ş.a.; Ramsey dezvoltă polemica, într-un articol din 1925, *The Foundations of Mathematics*[44], introducând şi tabăra logiciştilor (Frege, Russell,Whitehead); Weyl în 1921 publicase un articol despre

[39] Pentru relevanța „principiului silogismului", a se vedea Alexandru Surdu, „Teoria brouweriană a demonstrației", în *Neointuiționismul*, Editura Academiei Române, 1977, pp. 85–92.

[40] M. Marion în *op. cit.*

[41] Pasquale Frascollla, *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Routledge, London, New York, 1994.

[42] Se pot menţiona cei mai „ortodocşi" dintre ei, începând cu Waismann (*Introduction to Mathematical Thinking*, 1936, retipărit la Frederik Ungar Publishing co., New York, 1951), pe linia FWM, Schlick (cu contribuții în receptarea și dezbaterea TLP), Ramsey (matematician, logician și filosof, primul traducător în limba engleză a TLP), Alice Ambrose (cu studii asupra FWL și FWM).

[43] L.E.J. Brouwer, „Intuitionism and formalism", alocuţiune inaugurală la Universitatea din Amsterdam, expusă pe 14 octombrie 1912, tradusă de Arnold Desden, retipărită cu permisiunea autorului și editorului în *Bulletin of the American Mathematical Society,* 20 nov. 1913, pp. 81–96.

[44] F.P. Ramsey, *The foundations of mathematics, Proc. Lond. Math. Soc.* 2, vol. 25, 1925, pp. 338–384.

criza fundamentelor, *Of the contemporary crisis of the foundations of mathematics*[45], în care critică ierarhiile infinite cantoriene, una dintre cauzele principale ale crizei din fundamentele matematicii; Wittgenstein recunoaşte în expunerea lui Dirichlet din 1837, asupra tipurilor de funcţii, rădăcina teoriei mulţimilor care va conduce la paradoxurile care o vor submina[46].

UN CONCEPT DE FUNCŢIE ÎN STIL INTENSIONALIST WITTGENSTEINIAN

Wittgenstein va filosofa pe marginea principiilor stabilite de Dirichlet asupra formei generale a unei funcţii, y = f(x), reliefând opoziţia dintre genul de funcţie arbitrară (din care se vor dezvolta funcţiile analitice şi holomorfe[47]) şi funcţia recursivă de unde se vor dezvolta conceptele de „calculabilitate" şi „algoritmi". Se poate spune că la Wittgenstein funcţia matematică autentică este o *regulă* sau o *lege*.

Opţiunile lui Wittgenstein pentru ceea ce va deveni conceptul de *regulă, a urma o regulă* sunt în contrapondere cu cele trei principii stabilite de Dirichlet[48]:

1) Al „regulii variabile", după care relaţia dintre variabile dependentă *y* şi cea independentă *x* nu e nevoie să fie aceeaşi pentru tot intervalul de definiţie a funcţiei, iar prelungirea funcţiei pe întreg intervalul de definiţie se poate realiza arbitrar („principiul regulii arbitrare");

2) Un principiu interesant este cel al „altei matematici", după care nu e nevoie ca funcţia să fie definită prin operaţii matematice; acest principiu lasă loc definiţiei funcţiei prin acoladă, pe mai multe intervale ale variabilei, funcţia putând lua valori constante (aşa cum e funcţia scară a lui Dirichlet etc.);

3) Dirichlet mai introduce „principiul de deasupra legii" după care nu are importanţă dacă y = f(x) este dată printr-o singură lege, mai multe legi sau dacă funcţia apare fără nicio lege, la modul arbitrar.

Cu aceste principii se urmărea impunerea unui concept de funcţie generală în stare să cuprindă ca posibilitate toate situaţiile care ar putea să apară. Wittgenstein consideră că de aici provin consecinţele nefaste din domeniul fundamentelor matematicii generatoare de confuzii asupra extensiunilor infinite, a prelungirilor unei funcţii ce presupun liste de definiţii, aşadar un metalimbaj care aduce prejudicii asupra bazelor matematicii. De aceea aderă la concepţia marcată de Euler şi Kronecker, după care funcţiile nu sunt decât cele care urmăresc o regulă.

[45] H. Weyl, „Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik", în *Mathematische Zeitschrift,* nr. 10, pp. 39–79, retipărit şi tradus în limba engleză, *On the New Foundational Crisis in Mathematics* în Mancosu (ed), *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s,* Oxford: Clarendon Press, 1998, pp. 86–122.

[46] F. Waisman, în *Wittgenstein and the Vienna Circle,* ed. cit., p. 102.

[47] Tipice analizei matematice, cu conceptele de continuitate, derivabilitate, diferenţiabilitate, dezvoltare în serii.

[48] Despre acest subiect şi concepţia pur extensionalistă a funcţiei la Dirichlet, în M. Marion, *op. cit.*, p. 7 şi urm.

Când critică teoria identităţii a lui Ramsey[49], Wittgenstein face trimitere şi la arbitariul definiţiei unei funcţii a cărei extensiune nu poate avea orice lege, fiindcă altfel s-ar putea da mai multe legi pentru o aceeași funcţie, ceea ce face ca definiţia funcţiei respective „să nu spună nimic”[50]. Aşa cum observă Marion[51], la polul opus stă concepţia despre funcţia matematică la Kronecker, de unde se desprind trei principii după care se conduce şi Wittgenstein:

– La baza construcţiilor numerice stau numerele naturale;

– Niciun infinit complet nu este admis;

– În al treilea rând, demonstraţiile de existenţă a unui număr oarecare trebuie să ofere o metodă de aproximaţie a sa într-un număr finit de paşi, iar definiţiile acceptabile sunt numai cele certificate algoritmic.

Ce aduce Wittgenstein în schimb? Perspectiva anilor ’30 nu permite să se detaşeze o viziune asupra unui concept tipic wittgensteinian de funcţie. Dar având în vedere dezvoltarea ulterioară a FWM şi felul în care a fost interpretat de exegeză λ-calculul lui Church[52], legat şi de simbolistica numărului natural în TLP, s-ar putea spune că acest tip de funcţie e propriu concepţiei lui Wittgenstein. E vorba de o reacţie constructivistă la tipul de funcţie pur extensională, care va conduce la dezvoltarea unei logici combinatorice, ca ramură a logicii simbolice[53].

Aspectul intensionalist al acestui gen de calcul, în sensul în care Wittgenstein consideră superfluă teoria claselor şi fundamentele aritmeticii, se poate observa dintr-un exemplu ce presupune un concept matematic. Să luăm în considerare conceptul de *figură plană*. Dacă:
x - *figură plană* şi se aplică operatorul λ, adică „λ*x*.*x* este *figură plană*”, înseamnă că prin aceea că lui *x* i se aplică faptul că este *figură plană*, lui *x* îi revine *planeitatea*.

Se obţine astfel o mulţime sau mai exact o clasă, cum se exprimă Wittgenstein, în acest caz, clasa acelor *x* care se bucură de proprietatea de *planeitate*, observând cum extensiunea clasei se bazează pe intensiune. După cum constată Marion[54], funcţia nu mai constă într-o mulţime de perechi (*x*, f(*x*)), ci „funcţia este concepută ca o operaţiune care aplicată unui obiect produce un alt obiect.”

[49] L. Wittgenstein, *Philosophical Grammar*, part.II, III, §16, ed. cit., pp. 315–318.

[50] *Ibidem*, p. 317.

[51] M. Marion, *op. cit.*, pp. 8–9.

[52] A. Church, „A Set of Postulates for the Foundation of Logic”, în *Annals of Mathematics* nr. 33, 1932, pp. 346–366 şi nr. 34, pp. 839–864.

[53] Domeniul logicii combinatoriale în care nu se folosesc variabile și nici regula substituției caută să evite paradoxurile din teoria clasică a mulţimilor, prin folosirea unor operații prelogice numite λ-operatori; numai prin juxtapunerea simbolică de semnificații; în juxtapunerea MN, N dă semnificaţia N variabilei M; regula de transformare se scrie (λ*x*/M)N; λ*x*/M este un operator a cărui valoare pentru argumentul N se află prin substituirea lui N prin *x* în M: de exemplu, pentru M de forma x^2+1 şi N o constantă 2, atunci (λ*x*/M)N este (λ*x*/x^2+1)2 = 5. Logica combinatorie se dezvoltă cu lucrările lui Church (*The Calculi of Lambda Conversion*, 1941) şi Curry (*Combinatory Logic*, vol. I, 1958, vol II, 1972).

[54] M. Marion, *op. cit.*, p. 12.

Astfel, există o compatibilitate de tip calitativ-intensional între operator şi obiectul la care se aplică, operatorul fiind autoaplicabil sau se poate aplica de mai multe ori elementelor de „intrare”. De asemenea, domeniul său de aplicabilitate nu este delimitat sau definit în vreun fel – spre deosebire de modul extensional de a defini o funcţie.

Numai sub acest aspect, formalismul numărului natural din TLP este de tip operaţional şi intensionalist; ţinând cont de regula de transformare după care (λx/M)N se transformă într-o expresie în care N se substituie tuturor locurilor în care apare x în M; cf. TLP 6.02, putem scrie:

$(\Omega x/x)\Omega^0 = \Omega^0 x$ ($\stackrel{def}{\equiv} 1$), fiindcă avem un singur x de înlocuit şi Ωx dispare în procesul indicării valorii lui x; (Wittgenstein scria $x = \Omega^0 x$);

$(\Omega x/\Omega^0 x)\ \Omega^0 = \Omega^0\Omega^0 x \stackrel{def}{\equiv} 2$;

$(\Omega x/\Omega^0(\Omega^0 x))\ \Omega^0 = \Omega^0\Omega^0\Omega^0 x \stackrel{def}{\equiv} 3$; etc.

Dacă comparăm cu felul în care codifică Church numerele naturale:

$0 = \lambda fx.x$

$1 = \lambda fx.f\ x$

$2 = \lambda fx.f\ (f\ x)$

$3 = \lambda fx.f\ (f\ (f\ x))$ etc.,

nu putem decât să observăm similitudinea; doar că Wittgenstein pare să înceapă numărătoarea de la 1; dar nu e consecvent în felul în care îşi afişează formalismul, uneori începe cu 0, alteori cu 1, lucru de nu prea mare importanţă pentru nişte numerale (nume de numere).

A extrage un concept de funcție matematică wittgensteiniană este dificil de realizat, atâta timp cât Wittgenstein va dezavua modul acesta recursiv (ce presupune o „formă generală” a numărului natural demonstrată prin inducţie) şi va critica demonstraţiile prin inducţie şi funcţiile recursive tip Skolem cărora le contestă orice autoritate în ce priveşte fundamentarea aritmeticii, a asociativităţii adunării etc.

CONCEPŢIA GENERALĂ A LUI WITTGENSTEIN DESPRE NUMĂR

Scara pe care am urcat-o până acum şi am aruncat-o deja ne-a condus într-un „loc” de unde se desfăşoară o altă viziune asupra numărului natural. Dacă în TLP Wittgenstein desfiinţa logicismul de tip Frege-Russell cu un logicism propriu, acum numărul natural va fi conceput în cadrul mai larg al posibilităţilor oferite de un limbaj specific domeniului matematic. Tot acum filosoful va aborda şi celelalte tipuri de numere: raţionale, iraţionale, complexe.

NUMĂR ŞI CONCEPT. FILOSOFIA MATEMATICII ŞI FILOSOFIA LIMBAJULUI

Modelul de factură logică al numărului natural ca exponent al unei operaţiuni (logice) a presupus unele ingrediente specifice, cum au fost cele de obiect, stare de lucruri, propoziţie elementară (atomară), adevăr, fals, operaţiune (de adevăr), funcţie (de adevăr), argument, şir de forme, variabile propoziţionale, identitate, propoziţii generalizate, forma generală a funcţiei de adevăr, forma generală a operaţiunii, număr întreg, metodă matematică, teoria tipurilor etc, şi am constatat eşecul tractarian al abordării de tip logicist[55].

Acum se vor lămuri motivele pentru care Wittgenstein a renunţat la tot acest eşafodaj şi a abordat în cu totul alt mod conceptul de număr (natural, real etc). Voi urmări un alt tip de filosofie a numărului, care renunţă la logicism (dar nu și la formalism) şi nu se mai bazează pe un Spaţiu Logic (SL), ci pe unul gramatical, (SG), fără a confunda propoziţia matematică cu una din limbajul obişnuit. Cu acest prilej voi evidenţia diferenţele, dar şi asemănările dintre FWM şi filosofia wittgensteiniană a limbajului (FWL).

Pe legătura și opoziția dintre *număr* şi *concept* se bazează afinitățile, dar şi diferenţele dintre filosofia matematicii şi cea a limbajului la Wittgenstein. Nici una nu se reduce la cealaltă, ele se detaşează ca domenii distincte în cadrul filosofiei wittgensteiniene generale (FWG). Matematicul e un domeniu aparte, cu entităţi, structuri, legi proprii, netributare logicii sau limbajului obişnuit.

În spiritul discuţiei despre generalitate, ce debutează în TLP şi continuă în PR şi PG, *numărul, conceptul, obiectul, forma generală a propoziţiei matematice* sau *a limbajului* rămân teme recurente şi concepte centrale ale FWM.

Numărul nu mai este definit pe baza formei generale a operaţiunii (TLP), o definiţie „nebuloasă” pe care Wittgenstein nu o mai consideră necesară, dar nici nu o reneagă:

„...o introducere nebuloasă a conceptului de număr cu ajutorul formei generale a operaţiunii – cum am făcut-o întotdeauna – poate să nu fie necesară”[56].

Asupra acestui subiect delicat, Wittgenstein nu e tranșant: prin criticile asupra logicismului în genere, cât și prin autocriticile răzlețe asupra demersului de definire a numărului (din TLP), reiese doar că logicismul nu mai e necesar. Wittgenstein îşi continuă filosofia matematicii în acelaşi stil, căutând să explice, să corecteze lucrurile de acolo de unde le-a lăsat. Matematicul, domeniu aparte al meditaţiei filosofice, există în măsura în care se aplică, funcţionează. Calculul matematic are sens doar în aplicaţiile sale, aritmetica e autonomă, nefiind nevoie de fundamentarea ei (logicistă, intuiţionistă, formalistă). De aceea, pentru fundamentarea matematicii nu este necesar să vorbim de forma generală a „operaţiunii logice”, sinonimă practic cu „forma generală a propoziţiei” (cf. TLP 6, 6.01).

[55] A se vedea Iulian Grigoriu, „Filosofia matematicii și eșecul logicist în *Tractatus Logico-Philosophicus*”, vol. *Probleme de logică*, XXI, Editura Academiei Române, 2018, pp. 67–95.

[56] L. Wittgenstein, *Philosophical Remarks* (PR), ed. cit., X, §109.

Procedeul prin care operatorul Sheffer aplicat unui sistem de propoziţii produce o alta, atunci când prin el dorim să introducem conceptul de număr, nu este respins în totalitate, doar că acțiunea legii respective nu mai este generală şi nu e în măsură să surprindă proliferarea la nesfârșit a numerelor.

Wittgenstein îşi recunoaşte eşecul din TLP (mai degrabă îl evocă și îl nuanțează[57]), iar despre operatorul Sheffer continuă să discute[58] şi chiar să-l folosească într-un mod disimulat[59].

Ba chiar, luând în considerare contextul în care discută despre imposibilitatea de a se concepe succesiv toate numerele, se înţelege că Wittgenstein n-ar fi exclus ca acelaşi procedeu din TLP de generare a numerelor întregi s-ar putea aplica şi pentru a produce orice tip de numere (reale). Dar rămân rezerve asupra acestui aspect, cu următoarele grade de prioritate:

I) Filosoful nu exclude explicit că propriul logicism s-ar putea extinde şi asupra altor tipuri de numere;

II) Tendinţa de a exprima unitar conceptul de număr rămâne şi în filosofia târzie (prin mijlocirea *conceptului* şi nu a *formei generale*).

Mobilul acestui demers rămâne *totalitatea* (pe care Wittgenstein o nota în TLP printr-o variabilă cu o bară deasupra, ($\bar{x}$), şi care „singură, este dată prin concept"[60]. Iar ceea ce a arătat în TLP vizavi de logicism va face şi în continuare: fiindcă nu putem avea prin propoziţie o aprehensiune succesivă a tuturor numerelor şi nici prin concept şi nici în alt mod, domeniul matematicului rămâne o preocupare umană tot timpul în construcţie, cu un limbaj specific. Desigur, situaţia rămâne paradoxală, în felul în care o prezintă Wittgenstein: pe de o parte, pot să parcurg o serie de numere, pe de alta, totalitatea nu poate fi aprehendată, ea rămâne ca dat, un concept. Discuţia se va ramifica în continuare, odată cu meditaţiile lui Wittgenstein asupra numerelor reale. Deocamdată se observă importanţa *conceptului* în introducerea numerelor cardinale şi evoluţia punctului de vedere din TLP în aceeaşi matcă.

Conceptul de care se foloseşte în continuare Wittgenstein, şi anume (1, ξ, ξ+1)[61], seamănă foarte mult cu „forma generală" a numărului întreg din TLP 6.03, (0, ξ, ξ+1); în fond e acelaşi lucru!

6.022 (TLP) afirma: „Conceptul de număr nu este altceva decât ceea ce e comun tuturor numerelor, forma generală a numărului... "; exact ca şi PR XII, §125!:

„Faptul că, în cazul conceptului logic (1, ξ, ξ+1), existenţa obiectelor sale este dată împreună cu conceptul, arată că le determină."

[57] *Ibidem*, §124, §125, §126.

[58] *Ibidem*, XIII, §155, §162.

[59] Nu trebuie decât să constatăm asemănarea dintre modul de acțiune al simbolului Scheffer, prin care se neagă conjuncția a două propoziții date pentru a se obține o a treia, considerând șirul deductiv *p*, *q*, *p*/*q* = (~*p*· ~*q*) și formalismul mai nou cu aspect de logica predicatelor (partea din stânga implicației) prin care se asigură corectitudinea adunării, adică a obținerii din două numere date, un al treilea, adică aceeași înaintare într-un șir de forme: $(\exists 1)_x$ Fx. $(\exists 1)_x$ Gx.x. ~(Fx.Gx).⊃ $(\exists 2)$.Fx.V.Gx. (Cf. PR X, §100).

[60] L. Wittgenstein, PR XII, §124.

[61] *Ibidem*, XII, §125.

„Conceptul de număr”, alias „forma generală a numărului”, determină fiecare număr.

Diferenţa care apare e că nu mai este invocată în niciun fel operaţiunea logică şi că numărul ar fi exponentul său. În plus, nu mai este explicat niciun termen al parantezei. Şi atunci există două variante: fie Wittgenstein vine în continuitatea teoriei sale operaţionale pe care o consideră bine cunoscută din TLP, fie propune deodată o altă interpretare! Ultima alternativă se exclude. Continuitatea e izbitoare! Ceea ce convinge că e vorba de continuitate, este un alt paragraf din PR XII, §125: „Ceea ce este fundamental este pur şi simplu repetiţia unei operaţiuni. Fiecare etapă a acestei repetiţii are individualitatea sa proprie. Dar nu prin operațiune progresez de la o individualitate la alta...”, ci când se asociază „individualitatea ireductibilă” a fiecărui număr cu cea a operaţiunii de adunare „+1”.

Aşadar, nu e vorba de o operaţiune logică în procesul său de repetare, ci direct de o operaţie matematică. Cheia acestei situaţii consider că rezidă în *individualitatea* invocată. Misterul dezavuării operaţiunii logice este aici. E limpede că aplicat *într-un anume fel* unei structuri propoziţionale date, operatorul Sheffer produce o nouă propoziţie. Numai că acţiunea sa nu e liniară şi nu decurge la modul general sau cumva algoritmic! O operaţiune generală de tip Sheffer ar trebui să acţioneze algoritmic, mecanic, dar am văzut că nu o face. Acţiunea lui, aplicarea sa, e şi definiţia sa, prin existenţa fiecărui rezultat al său. Wittgenstein probabil e conştient de acest lucru (când afirmă imediat că „o operaţiune infinit de complicată nu este o lege”!) şi, din câte se vede, renunţă nu numai la operţiunea respectivă, ci la întregul context logicist; în schimb, rămâne la conceptul de „operaţiune” şi la simbolurile de generalitate exprimate de „ξ”, la termenul unitate „1” şi la operaţiunea de adunare, „+”.

Schimbarea sau, mai exact, progresul faţă de TLP e pus în lumină atunci când filosoful se referă la faptul că nu prin aplicarea unei operaţiuni se trece de la o individualitate la alta; aici consider că neagă procedeul din TLP pe care îl numise mai devreme „obscur”. Şi atunci despre ce operaţiune e vorba? Nu e una generală, care printr-un hocus-pocus face să apară orice număr şi aşa mai departe, ci de o simbolistică de tipul (1, ξ, ξ+1):

„Operaţiunea +1, repetată de trei ori, produce şi *este* numărul 3”[62].

Iar cu aceasta, se produce virajul de la logicism la un formalism ingenuu sau, mai aproape de Wittgenstein, la o *gramatică formală a numelor de numere*.

Generalitatea din „forma generală a numărului” invocată în TLP şi despre care va fi des vorba în întreaga FWM este înlocuită cu o lege „infinit de complicată”, deci o nonlege care se bănuieşte că „se complică” pe parcurs, pe măsură ce ne apropiem sau abordăm un număr, cu proprietăţile sale:

„Şi dacă vreau să dovedesc o proprietate care să fie a unui număr, într-un mod sau altul, trebuie întotdeauna să o introduc. În acest sens s-ar putea spune că proprietăţile unui anumit număr nu pot fi prevăzute. Le puteţi vedea numai când aţi ajuns acolo.”[63]

[62] *Ibidem*.
[63] *Ibidem*.

Dar nicio descriere a unei astfel de legi care priveşte un segment finit din mulţimea numerelor nu ne apropie de o lege completă, cum s-ar zice, total generalizată; şi atunci paradoxul se impune:
„Unde este atunci diferenţa dintre o lege infinit de complicată şi absenţa totală a legii?”; acel „şi aşa mai departe” din TLP devine acum „totul este așa cum este”[64].

De aceea, cuantificarea ca indicator al generalităţii, ca şi orice enunţ general privind vreo „esenţă a numerelor naturale”, nu are sens; nu se poate scrie $(\forall n).\varphi n$, fiindcă conceptul de „toate numerele naturale” nu este unul delimitat, mărginit[65].

*

Aritmetica ţine de propria ei aplicare, nu e nevoie să fundamentăm posibilitatea ei de funcţionare, ea nu *vorbeşte* despre numere, ci *lucrează* cu ele. Se admite că numerele sunt ele însele o proprietate logică a spaţiului şi timpului[66], iar calculul nu există decât în spaţiu şi în timp, ceea ce trimite la un tip de ontologie care nu se mai fundează pe entităţi, obiecte etc., ci mai degrabă pe legături şi forme. Aceste forme nu sunt neapărat logice, dar pot îmbrăca şi asemenea aspect. Numărul cardinal se aplică formei lingvistice subiect-predicat, în măsura în care caracterizează forma respectivă, de data aceasta, într-un Spaţiu Gramatical (SG), şi nu într-unul logic (SL).

Aritmetica e autonomă şi aplicarea ei duce către ea însăşi şi nu către metamatematică, pentru că este permis să o aplici peste tot unde este cazul. Ceea ce îl face pe filosof, în stil reprezentaţionist, să compare aritmetica cu o „geometrie mai generală”[67]. Ideea rezidă în faptul că cifrele se comportă firesc, fără să fie nevoie să le definim, ceea ce pare a fi legat în mod ciudat de absenţa contradicţiei interne în geometrie. O figură geometrică, chiar idealizată, exprimă mereu ceva, are mereu un *sens*, aşa cum s-ar spune şi despre propoziţia aritmetică (adică, independent de numerele care apar acolo); e de ajuns să avem regulile de funcţionare a cifrelor şi atunci e subsumată şi definiţia lor, nu mai e nevoie de o definiţie explicită, ci de asumarea unui mecanism de funcţionare: „Se poate spune că regulile cifrelor presupun mereu definiţia lor”, în sensul în care nişte entităţi presupun existenţa alteia ca posibilitate în *spaţiul gramatical al semnelor* (SG)[68].

În SG, numărul apare ca o aplicaţie ce acţionează asupra formei gramaticale, de tip subiect–predicat. Aşa cum exista o formă generală a operaţiunii logice şi o lege de trecere de la o formă logică la alta în TLP, acum se pune problema care ar fi forma cea mai generală de aplicare a aritmeticii şi cum s-ar putea ea

[64] *Ibidem*.
[65] Cf. *Ibidem* XII, §126.
[66] *Ibidem* X, §109.
[67] *Ibidem*.
[68] *Ibidem* X, §110.

reprezentaţiona[69]. În cadrul acestui nou tip de generalitate a unui SG, nicio formă nu se impune cu necesitate. Într-un mod tipic reprezentaţionist, Wittgenstein afirmă:

„Se pare că ceea ce reprezentaţionează forma generală a aplicării aritmeticii, este că *nimic* nu poate să fie aici enunţat. (Şi dacă este aici o reprezentaţionare posibilă, aceasta este de asemenea reprezentaţionarea corectă.)”[70]

Adică nu se poate enunţa nimic cu privire la forma generală a aplicării aritmeticii. Ceea ce este posibil este şi corect, dar nu mai este şi necesar (precum în SL din TLP, unde întreg posibilul era predeterminat logic şi, deci, necesar). În această **eliberare a posibilului** constă trecerea de la SL la SG în noua viziune a lui Wittgenstein asupra numărului. Iar din faptul că nu se mai pune problema necesităţii, se poate zice că o formă generală a aplicării aritmeticii este imposibilă. E una din multele observații de finețe că într-un anumit sens, *forma cea mai generală de aplicare a aritmeticii* (n.n) pare a nu fi necesară.

„Şi dacă în mod real nu e necesară, atunci este imposibilă.”[71] Iată o explicație a faptului că fundamentele nu pot fi... fundamentale.

Se înţelege că această lipsă a formei generale a propoziţiei nu împietează asupra situaţiilor concrete. Caracteristic noului spaţiu gramatical al numărului este că atunci când se indică un număr, în locul său poate să apară oricare altul şi propoziţia să aibă totuşi un sens (eventual un alt sens decât cel de până atunci); acestă constrângere la sens este singura limitare pe care o pune Wittgenstein noului SG în care se manifestă numărul[72].

Acum sensul se eliberează cu totul de valoarea de adevăr a propoziţiei:

„Aş spune că numerele nu pot fi definite decât plecând de la formele propoziţionale, independent de adevărul şi falsitatea acelor propoziţii.”[73]

Explicaţia acestei situaţii este dată de Wittgenstein, consider, într-un reprezentaţionism de tip formalist. Să presupunem că avem obiectele a, b, c, d, dintre care doar trei au proprietatea φ[74]; cazul respectiv poate fi reprezentaţionat printr-o disjuncţie:

$$\varphi(a).\varphi(b).\varphi(c) \vee \varphi(a).\varphi(b).\varphi(d) \vee \varphi(a).\varphi(c).\varphi(d) \vee \varphi(b).\varphi(c).\varphi(d) \; (\equiv 1);$$

[69] „Este vorba întotdeauna de a şti dacă şi cum este posibil să reprezentaționez forma cea mai generală a aplicării aritmeticii” (PR X, §110). Wittgenstein foloseşte formele verbale *darzustellen, dargestellt, darstellen* (*ilustrat, prezentat, arătat, afişat, indicat*), alături de *Darstellung-reprezentare*; ceea ce în traducerea din engleză apare pur şi simplu *to represent, representation* (PR 1998, trad. Raymond Hargreaves şi Roger White, Basil Blackwell, Oxford), iar în franceză (PR 1975, Gallimard) sunt puse în evidenţă de traducător (Jacques Fauve) prin *re-presenter, re-presentation*; aşa încât, în toate aceste situaţii, consider că se poate utiliza *a reprezentaţiona, reprezentaţionare*. Reprezentaţionismul wittgensteinian are şi alte sinonime nu neapărat omofone cu reprezentarea: *normă, formă* sau diverse situaţii concrete, cum ar fi comparații, metafore, expresii din cadrul *jocurilor de limbaj* etc.).

[70] L. Wittgenstein, PR X, §110.

[71] *Ibidem*.

[72] „Ceea ce este caracteristic când indicăm un număr, este că în locul acestuia am putea să punem oricare alt număr, şi că propoziţia trebuie să păstreze întotdeauna un sens; deci seria infinită de forme propoziţionale” (PR X, §110).

[73] L. Wittgenstein, PR X, §102.

[74] Cf. *ibidem* X, §102.

Conceptul φ nu e nevoie să fie dat; apoi iarăşi nu trebuie să ştiu care dintre φ(a), φ(b), φ(c) sau φ(d) este adevărată: modul în care îmi parvine situaţia e de ajuns ca să mă conducă la numărul „4”, adică un cardinal al tuturor combinaţiilor posibile.

„Aici este, în mod manifest, un caz în care a da un număr nu înseamnă să te referi la un concept (deşi cu ajutorul semnului egal putem să îl facem astfel să apară).”[75]

Exemplului de mai sus ar putea să i se reproşeze faptul că se procedează cumva prin inducţie şi că numărul „4” provine din numărul „3”, mai precis din numărul celor care posedă proprietatea φ; Mai general, exemplul ar fi sunat astfel: din obiectele a, b, c, d, doar unele au proprietatea φ; Atunci:

φ(a)Vφ(b)Vφ(c)Vφ(d) V φ(a).φ(b) V φ(a).φ(c)Vφ(a).φ(d)Vφ(b)φ(c) V φ(b).φ(d)Vφ(c).φ(d) V φ(a).φ(b).φ(c) V φ(a).φ(b).φ(d) V φ(a).φ(c).φ(d) V φ(b).φ(c).φ(d) V φ(a).φ(b).φ(c). φ(d) (≡ 1)

Dar ceea ce vrea să arate Wittgenstein prin situația imaginată e că nu avem întotdeauna nevoie de un concept care să mijlocească, să exprime o situaţie reală; posibilitatea unui număr se raportează deci la *sensul* şi nu la *adevărul* sau *falsitatea* unei propoziţii:
„2+2=4 ar putea să zică: Peste tot unde am 4 obiecte există posibilitatea să le percepi 2 câte 2.”[76]

Wittgenstein va spune că „numerele sunt imagini ale extensiunilor conceptelor”[77], ceea ce consider că este o încadrare gramaticală. Spaţiul Gramatical (al semnelor, metaforic, reprezentaţionist), spre deosebire de cel logic, poate să găzduiască orice obiecte, care „ipotetic pot fi puse sub aceeaşi pălărie”[78], aşadar a conceptului; iar în PG[79] numărul cardinal este o proprietate internă a unei liste (încadrare matematică intesionalist-reprezentaţionistă). Se observă că Wittgenstein nu exclude forma generală a numărului (din TLP); dar ea nu se mai bazează pe generalitatea iluzorie a acțiunii unei operaţiuni logice, ci e conturată în spirit matematist, axiomatic (asemănător axiomaticii de tip Peano); în plus, ea nu mai este necesară, *a priori* și nici unitară: e de o posibilitate circumstanțială.

Aceste două încadrări ale numărului (după extensiune şi intensiune) reflectă de asemenea concepţia sa realist-intensionalistă (deci nu propriu-zis realistă). Extensiunea conceptului intervine în încadrarea numărului doar la modul reprezentaţionist, fiindcă numărul ca atare se poate lipsi la o adică de concept. Pe de o parte, cum voi arăta, nu e nevoie să ştiu despre extensiunea cărui concept e

[75] *Ibidem*.
[76] *Ibidem*.
[77] *Ibidem*, X, §100.
[78] *Ibidem*, X, §99.
[79] L. Wittgenstein, PG, part. IV, *On Cardinal Numbers*, cap. 19, p. 332.

vorba în apariţia obiectelor unde apare numărul; pe de alta, se va vedea că în propoziţiile tipic matematice, însăşi apariţia numărului este conceptul său; deocamdată, pentru a vedea dacă numărul e în vreun fel legat de concept, Wittgenstein constată[80] că nu are sens, de pildă să se vorbească despre „a, b, c" ca fiind trei obiecte pur şi simplu; e nevoie de un concept care să le adune sub aceeaşi „pălărie"; după aceasta, se poate renunţa la concept.

„...numărul nu depinde decât de *extensiunea* conceptului şi, o dată determinată aceasta, conceptul poate, să spunem aşa, să se retragă. Conceptul nu este decât o metodă pentru a determina o extensiune, aceasta fiind autonomă şi în esenţa ei independentă de concept; şi de fapt nu contează deloc să ştii prin intermediul cărui concept am determinat extensiunea..."[81]

Conceptul e un mijloc de a accede la număr, acesta este argumentul în favoarea teoriei extensionale a numărului, prin *separarea* între concept și număr. Dar dacă am separa extensiunea de concept, atunci s-ar pierde chiar relaţia internă din care apare numărul.

Observaţia aceasta lasă să se întrevadă faptul că definitoriu pentru număr (ca extensiune a unui concept) este chiar *relația internă* dintre clasă (mulţime, extensiune) şi concept. Practic din concept apare clasa, nu pot spune că ulterior renunţ la ceea ce a generat faptul definitoriu al numărului[82].

Dacă conceptul nu este cu adevărat decât un mijloc auxiliar pentru a ajunge la extensiune, nu are ce să caute atunci în aritmetică; am putea chiar să separăm clasa şi conceptul care îi este întâmplător ataşat; dar în cazul invers, o extensiune independentă de concept nu este decât o himeră şi mai bine ar fi atunci să nu se mai vorbească despre asta deloc, ci să se vorbească numai despre concept.[83]

Se poate constata aşadar că şi în cazul definiţiei extensionaliste, accentul cade tot pe intensiune. Cele două încadrări delimitează un fel de „exterior" şi de „interior" al numărului; extensiunea e un aspect lingvistic, intensiunea ţine de aspectul specific matematic (ce are la bază un dat intuitiv). Dar pe Wittgenstein nu îl va mai interesa atât metafizica, cât modul numerelor de *a se arăta*, calculele în care numerele apar, faptul că diferenţele dintre tipurile de numere sunt decisive... După cum voi arăta în continuare, nu e nevoie întotdeauna ca numărul să fie definit pe baza extensiunii explicite a unui concept.

[80] L. Wittgenstein, PR X, §109.

[81] *Ibidem*, X, §99.

[82] Punctului de vedere Frege–Russell după care numărul depinde numai de extensiunea conceptului şi după ce s-a determinat numărul, conceptul poate fi eliminat, i se poate obiecta că atunci nici nu ar mai fi nevoie de concepte în aritmetică şi s-ar impune „divorțul" faţă de întreaga clasă asociată cu acesta, extensiunea lui; şi astfel, fundamentarea numărului e blocată (în legătură și cu PR XI, §119). Wittgenstein nu e deranjat să existe un concept pentru un număr, dar nu există așa ceva, el depinde tot timpul de o extensiune (fiind ori un mijloc, ori o relaţie între elementele sale); iar întrebarea din finalul PR X, §101 dacă ar avea vreun sens o relaţie între două obiecte, chiar dacă nu sunt subsumate unui concept, e una retorică.

[83] Situaţie problematizată în PR X, §99.

NUMĂR–PERMUTARE; PROPRIETĂŢI ALE DOMENIULUI MATEMATIC. O DEFINIŢIE A PROPOZIŢIEI MATEMATICE

Există situaţii în care numărul apare într-un context în care extensiunea conceptului este numărul însuşi, şi anume, atunci când numărul este chiar „forma” în care îl turnăm (reprezentaţionăm). Să numim acest tip de propoziţii, (α).

Wittgenstein dă exemplul cel mai direct: Permutările fără repetiţie pentru A, B sunt AB şi BA: „Ele nu sunt extensiunea unui concept, ci sunt însuşi conceptul”[84].

Ideea pe care o susţine aici Wittgenstein este una de structură internă, de schemă concretă a numărului; teoria combinatorie e un pretext. În AB, BA se vede „o relaţie internă” care „nu se lasă descrisă”, ci se arată prin ea însăşi. Dar care e corelaţia dintre aceste permutări şi numărul 2? Există vreuna? Ea e asemănătoare cu cea dintre „algebră şi inducţia aritmeticii”... sau poate cu cea dintre „geometrie şi aritmetică”[85]?

Propoziţiile de tip (α) sunt realităţi matematice care *conţin* numărul: Există *două* permutări între A şi B.

Mai există propoziţii de alt tip (β), în care numărul e ceva exterior propoziţiei. De pildă: „sunt două personaje în această piesă”[86].

α şi β sunt propoziţii cu grade diferite de generalitate: Astfel, despre cele două personaje se pot afirma diverse lucruri, dar cel mai general că sunt două. Dar în cazul permutărilor dintre A, B, nu este aşa. Nu pot să descriu AB, BA într-un mod mai general şi propoziţia „«2 permutări sunt posibile» să spună mai puţin (adică ceva *mai general*, n.n., cf. urm.) decât că «permutările AB, BA sunt posibile»”[87].

A afirma că pentru A, B, C sunt 6 permutări nu spune nici mai mult nici mai puţin decât arată schema:

ABC
ACB
BAC
BCA
CAB
CBA

Aici se reprezentaţionează relaţia internă dintre permutări şi acel lucru care face completă această schemă nu se lasă altfel descris, constată Wittgenstein[88].

Numărul în acest caz e raportat la ceva care îl conţine, pe când între personaje şi numărul lor nu e nicio legătură de conţinut; avem de a face cu diferenţa dintre aspectul intensionalist al propoziţiei şi cel extensionalist. Propoziţia care îşi conţine din start semnificaţia poate fi numită de tip (α).

[84] L. Wittgenstein, PR XI, §116.
[85] *Ibidem*.
[86] *Ibidem*.
[87] *Ibidem*.
[88] *Ibidem*.

Şi când anume e vorba de astfel de propoziţii? Răspunsul abrupt ar fi: în cazul în care e vorba de propoziţii faţă de care un eventual dezacord între interlocutori nu poate fi acceptat de cel care are dreptate, fiindcă propoziţia are un sens dinainte stabilit şi practic unanim acceptat. Iar aceste propoziţii sunt cele mai îndreptăţite să fie numite „de tip matematic" (α).

Genul acesta de răspuns obligă la o explicitare de tip reprezentaţionist.

Conform PR X, §114, există situaţii în care cineva ar putea să fie întrebat dacă între anumite două numere există un număr prim sau câte numere prime se află într-un anumit interval.

Wittgenstein spune că răspunsul ţine de domeniul a „ceea ce se arată" (de care aparţine şi *matematicul*, dar şi unele propoziţii empirice: „există 7 culori în spectrul vizibil" etc.). E ca şi cum răspunsul ar fi *scris* dinainte de a fi pusă întrebarea.

Se pun următoarele probleme:

1) Cum poate fi caracterizat tipul (α) de propoziţii;

2) Ce alte tipuri de situaţii (β) pot să apară;

3) Cum pot fi aplicate în practică propoziţiile de tip (α);

4) Cum pot fi descrise propoziţiile matematicii?

1) Acest tip de propoziţii este caracterizat ca fiind acela care nu produce în mod normal dezacorduri; pot fi propoziţii matematice (sintetice *a priori* după Kant), ale ştiinţelor naturii, senzoriale, empirice;

2) Deocamdată să dăm exemple de alte tipuri de propoziţii: „câte persoane au fost în această cameră" sau „am auzit 12 bătăi ale pendulei", sau „în interiorul pătratului sunt 10 puncte" etc.

„Dacă am vrea să ştim ce semnifică o propoziţie, am putea să punem întotdeauna întrebarea: «Cum am putea să o ştim?» Oare eu ştiu că între 3 elemente există 6 permutări posibile în acelaşi mod în care ştiu că există 6 persoane într-o piesă? Nu. De aceea această propoziţie este de un alt tip decât cealaltă."[89];

3) Wittgenstein arată că propoziţiile de tip (α), cum e şi propoziţia de combinatorică, se aplică precum nişte „legi de inferenţă, asigurând tranziţia de la o propoziţie la alta, atunci când e cazul, fiecare descriind o realitate, nu o *posibilitate*"[90].

Şi ele se raportează la posibilitate (imposibilitate), dar specificul lor e că descriu (reprezentaţionează) o realitate. Wittgenstein dă un exemplu elocvent vizavi de modul lor de aplicare:

„Astfel aş putea să deduc din propoziţia «Am desenat 7 câmpuri prin permutarea lui a.b,c», că există cel puţin o permutare care se repetă. – Şi din propoziţia: «Am repartizat 5 linguriţe în 4 ceşcuţe», urmează că unei ceşcuţe îi revin 2 linguriţe[91] etc."[92] şi imediat se explică:

„Dacă cineva nu este de acord cu noi asupra numărului de oameni din piesă, afirmând că sunt 7, când nu am văzut decât 6, noi am putea să îl înţelegem, chiar

[89] L. Wittgenstein, PR X, §114.
[90] *Ibidem*.
[91] E vorba de principiul lui Dirichlet.
[92] PR X, §114.

dacă nu am fi de acord cu el. Dar când afirmă că pentru el sunt 5 culori pure, noi nu îl mai înţelegem, sau atunci trebuie să presupunem că între noi este o neînţelegere totală. Acest număr e stabilit în dicţionar şi gramatică, şi nu în interiorul limbajului."[93]

Există propoziţii faţă de care dezacordul poate fi înţeles, admis, probabil; dezacordurile aparţin limbajului (nu se raportează la o realitate pe care trebuie să o verifici, nu are sens să o verifici); sunt propoziţiile de tip (β); dezacordul se raportează la posibilitate şi imposibilitate (pot zice: poate nu văd eu bine sau interlocutorul meu); şi alte propoziţii faţă de care dezacordul nu poate fi înţeles (nu se mai interpune nimic în cadrul realităţii care să mă facă să îl înţeleg), ele aparţin dicţionarului, gramaticii, matematicii sau pot fi propoziţii nomologice (exprimă legi ale ştiinţei) domeniale, locale, într-un cuvânt propoziţii de tip (α). Aici, dezacordul faţă de ele ţine de o imposibilitate; dar sunt în interiorul aceleiaşi realităţi ca şi în primul caz, pentru că „6" şi într-un tip de propoziţie, şi în altul are aceeaşi semnificaţie independentă de propoziţie; nu realitatea se schimbă în cele două propoziţii, ci posibilitatea sau imposibilitatea a ceea ce este afirmat faţă de realitate.

Când zic: „sunt 5 culori pure", sunt în dezacord cu realitatea, pentru că acest lucru e imposibil. Dacă zic că nu sunt 5 culori pure, sunt în acord pentru că ştiu că sunt 3. Sensurile propoziţiilor le iau în consideraţie în funcţie de posibilitatea şi imposibilitatea lor faţă de realitate; propoziţiile de tip (α) şi (β) le raportez la realitatea în cadrul căreia pot să le determin posibilitatea şi imposibilitatea, prin utilizarea lor. Wittgenstein arată că prin utilizarea lor le asigurăm posibilitatea şi imposibilitatea în cadrul realităţii;

4) Din această discuție, pot extrage o definiție a propozițiilor matematicii și a domeniului matematic:

Propoziţiile matematicii sunt acele propoziţii de tip α (realist-intensionalist), pentru care pot să le determin posibilitatea şi imposibilitatea în cadrul realităţii matematice sau dezvoltând domeniul matematicului, fără să fac apel la alte domenii (de tip empiric, senzorial, psihologic etc).

Domeniul matematic este un domeniu la care se raportează toate celelalte domenii (ale ştiinţelor naturii, de pildă) şi conţine propoziţii faţă de care dezacordul este imposibil fiindcă nu e real.

OBSERVAȚIE

Încadrarea de mai sus a propozițiilor matematicii (de tip α) și a celorlalte (de tip β) e surprinsă în mod principial (chiar dacă în treacăt și cu justificări diferite) de către Platon în dialogul *Euthyphron*:

„SOCRATE: Dar şi că zeii se învrăjbesc, şi acest lucru se spune, Euthyphron, şi că se ceartă unii cu alţii, şi că se iscă mânie între ei?

EUTHYPHRON: Da, se spune.

SOCRATE: Oare în care privinţă se iscă neînţelegerile care nasc ura şi mânia, preabunule? Hai să cercetăm astfel: dacă am avea păreri deosebite – tu şi eu – despre nişte

[93] *Ibidem*.

numere, care din ele e mai mare, oare deosebirea în această privinţă ne-ar face să ne mâniem şi să ne duşmănim unul pe altul, sau, apucându-ne de socotit, ne-am împăca repede?

EUTHYPHRON: Ne-am împăca, desigur.

SOCRATE: Aşadar, şi dacă am avea păreri deosebite despre ce e mai mic şi ce e mai mare, apucându-ne să măsurăm, am înceta repede neînţelegerea?

EUTHYPHRON: Aşa este.

SOCRATE: Iar apucându-ne de cântărit, cred că ne-am împăca în privinţa a ce e mai greu şi ce e mai uşor?

EUTHYPHRON: Cum să nu?

SOCRATE: Atunci care sunt lucrurile în privinţa cărora dacă am avea păreri deosebite, neputând ajunge la un criteriu de apreciere, am deveni duşmani şi ne-am învrăjbi? Poate că nu-ţi vin numaidecât în minte, dar, din vorbele mele, încearcă să vezi dacă nu cumva acestea sunt dreptatea şi nedreptatea, frumosul şi urâtul, binele şi răul; oare nu tocmai acestea sunt lucrurile despre care deosebindu-ne în păreri şi neputând ajunge la nişte criterii potrivite am ajunge duşmani, atunci când ar fi să ajungem, şi eu şi tu şi toţi ceilalţi oameni?

EUTHYPHRON: Chiar aceasta e neînţelegerea, Socrate, şi în aceste privinţe.

SOCRATE: Bine, Euthyphron, dar zeii, dacă ajung la neînţelegeri, oare nu în aceste privinţe le au?

EUTHYPRON: Neapărat."[94]

Socrate numără sau măsoară, pentru a ajunge la un acord, lucru pe care îl face și Wittgenstein. Dar dacă Socrate e convins că acordul vine din lege, adevăr și realitate, de aceea e real, Wittgenstein constată că matematicul e un domeniu care conține criteriul adevărului ca funcționare, în afara vreunei legi (sau poate în cadrul uneia infinit de complicate), de aceea e real. Cu aceasta, Wittgenstein surprinde un domeniu la fel de independent și gratuit ca și cel estetic (sau moral), anume cel matematic (din propoziții de tip α), care nu se știe dacă nu ar isca certuri între zei (după cum se vede că iscă între filosofi!) ca și celelalte propoziții invocate (de tip β). Aici se deschide o nouă discuție fiindcă acordul ține ori de evidență ca funcționare, ori de credință ca fundamentare, ambele fiind atribuite propozițiilor matematicii. În acest sens, aritmetica e o geometrie mai generală care e de crezut (că funcționează), deci posibilă (în sens de *nu imposibilă*), și nu de justificat (nenecesară, fără fundamente).

În acest mod, posibilul matematic (în sensul că *nu e imposibil*) se delimitează de necesar (o fundamentare care i-ar da *posibilitate*).

CARACTERUL INTENSIONALIST AL NUMĂRULUI

Discuţia despre numere cardinale privite ca fiind extensiunea unor concepte ar risca să se dilueze sub specia unei generalităţi de dragul generalităţii, când nu mai interesează conceptul sub care se alcătuieşte lista sau extensiunea respectivă. Însă o altă caracterizare de tip reprezentaţionist a numărului cardinal vine să spună

[94] Platon, „Euthyphron", în *Opere*, vol. II, trad. Francisca Băltăceanu și Petru Creția, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1976, 7 b, c, d.

că „numărul cardinal este o proprietate internă a unei liste”[95]; şi atunci viziunea asupra numărului cardinal capătă relief: un „exterior” şi un „interior”:

„Am putea spune, aproximativ, că un număr este o proprietate externă a unui concept şi o proprietate internă a unei extensiuni (lista de obiecte care cade sub el).”[96]

Simbolul pentru extensiunea unui concept este o listă. Un număr este o schemă pentru extensiunea unui concept. Cum pune în valoare Wittgenstein aspectul intensionalist al structurii numărului cardinal? Prin diverse exemple[97], prin care evidenţiază o structură internă, o funcţiune structurală a numărului cardinal. Ideea de bază în jurul căreia glosează filosoful, şi dă mai multe exemple, e că structura unui număr cardinal rezidă într-o posibilitate, aceea de a fi corelat (cu tot ce reprezintă el ca clasă şi extensiune) cu un alt număr. În teoria claselor a lui Russell, doar o corelaţie *actuală*, *reală* poate să arate „similaritatea” dintre două clase. Pe când aici, miza cade pe *posibilitatea* corelaţiei ca relaţie internă între extensiunile conceptelor.

De aceea, o corelaţie unu-la-unu între două mulţimi nu arată la rigoare şi echinumericitatea lor. A spune că două mulţimi au acelaşi număr de elemente se poate doar în acelaşi timp cu numărarea lor. Reflexul acesta vine încă din perioada TLP, când propoziţiile logicii şi Spaţiul Logic posedau o structură internă *a priori*, combinatorică, în afara timpului, dar care *se arăta* în cadrul SL. Acum e rândul *matematicului* să posede entităţi faţă de care se formează conceptele, evenimentele, procesele. Aceste tipuri de situații le pune acum în lumină Wittgenstein, apelând la nişte experimente ale gândirii cu fapte evidente: O simplă trimitere de tip ontologic: numărul este *posibil* fiindcă în orice eveniment fizic există o evidenţă pe care o distingem ca un „element formal de ordine pe care îl putem numi spaţiu”[98].

ADUNAREA ÎNTR-UN SPAȚIU GRAMATICAL

De caracterul intensionalist al numărului cardinal (ca proprietate internă a unei liste) ţine şi „aritmetica liniilor” care reprezentaţionează numărul. Dacă avem obiectele x, y, z, u care cad sub conceptul F, se poate stabili o corelaţie între „(∃x,y,z,u).FxFyFzFu” și modul cum poate fi prescurtată expresia, arată Wittgenstein, prin „(∃||||x).Fx”.

Liniuțele marchează structura numărului, dar sunt independente de aritmetică. Wittgenstein va arăta că structura internă a numerelor puse împreună nu se răsfrânge și asupra unui rezultat al adunării. Rezultatul adunării e independent de numere tocmai din cauza structurii lor interne și poate fi conceput printr-o gramatică proprie (o va numi o „alchimie”[99] independentă).

95 L. Wittgenstein, PR XI, §118.
96 L. Wittgenstein, PG part. IV *On Cardinal Numbers* §19, p. 332, în ed.cit.
97 PR XI, §118, §119 etc.
98 *Ibidem*, XI, §119.
99 L. Wittgenstein, PR V, §16.

„Ce aritmetică se ocupă cu schema ||||? – Dar vorbește aritmetica despre liniile pe care le trag cu creionul pe hârtie? – Aritmetica nu vorbește despre linii, ci *operează* cu ele.”[100]

CE ESTE ADUNAREA?

E întrebarea la care încerc să răspund în continuare ţinând cont de tatonările din *Philosophical Remarks*, dar mai ales de ideile tranşante din *Philosophical Grammar*.

Adunarea ca posibilitate este conţinută în mecanismul unor propoziţii simbolice în cadrul cărora, ne avertizează Wittgenstein, avem de a face cu o corelaţie reală, fiindcă posibilă:

$$(\exists 1)_x \,\mathrm{Fx}.\ (\exists 1)_x \,\mathrm{Gx.x.} \sim(\mathrm{Fx.Gx}).\supset (\exists 2).\mathrm{Fx.V.Gx}$$ [101]

Iar dacă în genere, predicatele F şi G sunt de forma x = a.V.x = b.V.x = c...., atunci formula de mai sus este un mecanism care adună. Simbolurile „1” şi „2” sunt definite şi nu joacă un rol aparte în vreun tip de fundamentare aritmetică.

Consider că modul prin care se introduce obiectul *x* nu este altul decât cel prin care Ramsey introduce obiecte infinit de numeroase prin negarea următorului şir de propoziţii (metodă pe care Wittgenstein o critică[102] la PR XII, §135):

~($\exists x$).Fx

($\exists x$).Fx.~(∃x.y).Fx.Fy

(∃*x.y*).Fx.Fy. ~(∃x.y.z).Fx.Fy.Fz etc.

Acest mecanism al adunării de tipul formulei de la PR X, §100 facilitează introducerea unor reguli de substituţie, cum se arată la PR X, §101, în urma cărora se pot scrie propoziţii de tipul m + n = p:

$(3)_x$ Fx. $(4)_x$ Gx.~(∃x)Fx.Gx.⊃ $(3+4)_x$ Fx.V.Gx, expresie echivalentă cu substituţia 3 + 4 = 7.

[100] L. Wittgenstein, PG, ed. cit., p. 333.

[101] Această propoziţie poate fi inspirată şi din teoria claselor: există elementul „1” care ţine de conceptele „F” şi „G”, şi clasele celor două concepte nu au nici un alt element în comun, atunci există un alt concept, „2”, care cade sub clasa „FvG”. Același formalism, întâlnit și în PR X, § 100, §101, ar putea să reprezinte o rescriere a acțiunii simbolului lui Scheffer camuflat sub expresii de logica predicatelor sau chiar să nu reprezinte decât forma generală a funcţiei de adevăr (sau forma generală a propoziției $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ (cf. TLP 6) și chiar a operațiunii logice, adică de trecere de la o propoziție la alta $\Omega'(\bar{\eta}) = [\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'(\bar{\eta}) = [\bar{\xi}, \bar{\eta}, N(\bar{\xi})]$ (cf.TLP 6.01), ceea ce va conduce la forma generală a numărului natural!

[102] Dacă presupunem că există trei obiecte (doar x, y, z au o anumită semnificaţie), atunci nu mai are sens scrierea ~(∃x.y.z.u).Fx.Fy.Fz.Fu, fiindcă al patrulea obiect nu are semnificaţie; în acest fel, consider că seria se opreşte de la pasul al doilea sau chiar de la primul (nu există *x*, dar care *x*?). Wittgenstein nu spune aceasta, ci că în acest mod nu se ajunge la inifinit; consider că definiţia funcţionează cel puţin în cadrul mulţimilor finite, chiar Wittgenstein o foloseşte, cum se va vedea în PG.

Să presupunem că se poate introduce o relaţie de egalitate care să nu fie simetrică, plecând de la faptul că 3 + 4 = 7 cu necesitate, dar reciproc nu mai e necesar, ci doar posibil:

$$7 = 3 + 4.$$

Despre ce e vorba? Wittgenstein observă că dacă 4 obiecte satisfac o funcţie, nu spunem cu necesitate că ele sunt compuse din 2 şi 2 obiecte. În prima formulă de mai sus are sens întotdeauna să îl vedem pe 7 ca 3 + 4, în sensul că nu există un semn 7 în care să nu poată fi distinşi 3 şi 4. Şi mai clar, se poate defini (în stil reprezentaţionist):

a) egalitatea necesară, în care $3 + 4 =_{nec} 7$;

b) celălalt tip de egalitate posibilă s-ar defini în stilul $7 =_{posibil} (3 + 4)$, dar şi $7 =_{posibil} (1+1+1+1+1+1+1)$ etc;

Deci 3 + 4 este, pe de o parte, egal necesar cu 7, dar 7 este egal posibil cu 1+1+1+1+1+1+1; aşadar, orice egalitate necesară devine una posibilă; *posibilul* e propriu sensului propoziţiilor din SG şi nu *necesarul*. Acesta e sensul în care Wittgenstein constată că „oriunde există 4 obiecte, există posibilitatea de a le percepe 2 câte 2”[103].

De altfel, artificiul de mai sus presupune din start că numărul are o structură internă pe care o reprezentaţionăm prin liniuţe care pot fi adiţionate una câte una.

Wittgenstein arată într-un stil propriu reprezentaţionist că nu putem accede sub nicio formă la numărul sumă al unei adunări: rezultatul unei adunări este independent de termenii adunării, aşa că trebuie conceput aparte, în contextul unui SG relativ la schemele gramaticale ale numărului.

Astfel, folosind notaţia lui Ramsey (cf. PR XII, §135), Wittgenstein purcede la următoarea schemă de definire a numerelor cardinale, asemănător „înaintării într-un şir de forme”. Definiţia următoare:

$(\exists x).\varphi x : \sim(\exists x, y).\varphi x.\varphi y. = \text{Def} .(\varepsilon x).\varphi x$

$(\exists x,y).\varphi x.\ \varphi y : \sim(\exists x, y,z).\varphi x.\varphi y.\ \varphi z = \text{Def} .(\varepsilon x,y).\varphi x.\ \varphi y$ etc

$(\varepsilon x).\varphi x = \text{Def} .(\varepsilon | x).\varphi x$

$(\varepsilon x,y).\varphi x.\ \varphi y = \text{Def} .(\varepsilon | | x).\varphi x = \text{Def} .(\varepsilon 2x).\ \Phi x$, etc

......

e o vizualizare (reprezentaţionare) a structurii interne a numerelor (ca proprietate internă a extensiunii lor). Wittgenstein doreşte să exprime mai departe suma a două numere, aşa cum a făcut şi în TLP (chiar dacă în treacăt). Deci, dacă avem numerele naturale reprezentaţionate prin liniuţele din structura lor internă asimilate simbolurilor arabe (1, 2, 3...), putem ajunge să demonstrăm că 2 + 3 = 5?

[103] L. Wittgenstein, PR X, §102.

Wittgenstein arată că:

$$(\varepsilon||x).\varphi x.\ (\varepsilon|||x).\psi x.\ \sim\underbrace{(\exists x).\ \varphi x.\psi x.\supset}_{\text{Ind.}}.(\varepsilon|||||x).\varphi x\vee\psi x \text{ este o tautologie.}$$

Să notăm această propoziţie cu A.

Dovedeşte aceasta propoziţia aritmetică 2 + 3 = 5? Desigur că nu! Ea nu arată că $(\varepsilon||x).\varphi x.\ (\varepsilon|||x).\psi x.\text{Ind.} \supset.(\varepsilon|| + |||x).\varphi x\vee\psi x$ este tautologie, deoarece nu a fost spus nimic în definiţie despre suma $(|| + |||)$[104].

Dacă se scrie sub forma abreviată, $\varepsilon||.\ \varepsilon|||.\supset.\varepsilon|||||$, atunci 2 + 3 = 5 revine la problema: dată fiind partea stângă, să se afle câte linii sunt în partea dreaptă a implicaţiei $\supset$ ca să se obţină o tautologie. Wittgenstein arată că putem găsi numărul de liniuţe, putem să descoperim într-adevăr că este vorba de $|| + |||$; dar în aceeaşi măsură se poate descoperi că el este $| + ||||$ sau $| + |||+|$, pentru că el este toate acestea. Putem găsi de asemenea o demonstraţie inductivă că expresia algebrică $\varepsilon n.\varepsilon m.\supset.\varepsilon(n+m)$ este tautologie. Atunci am dreptul să privesc o propoziţie ca $\varepsilon 17.\varepsilon 28.\supset.\varepsilon(17+28)$ ca tautologie. Dar ne dă faptul aceasta ecuaţia 17 + 28 = 45? Cu siguranţă, nu! În acord cu această regulă generală, ar fi de asemenea judicios să se scrie $\varepsilon 2.\varepsilon 3.\supset.\varepsilon 5$ ca o tautologie; dar 2 + 3 = 5 are sens în măsura în care este elaborat în continuare.

Prin urmare, ecuaţia 2 + 3 = 5 devine $|| + ||| =|||||$, dar ea are un final dacă semnul „|||||” poate fi recunoscut într-un mod sau altul ca fiind semnul „5”, care este independent de ecuaţie. El poate fi definit la fel ca în TLP 6.02, dar fără ca liniuţele să reprezinte operaţii care se aplică unor propoziţii.

Cum se exprimă filosoful în PR X, §103, ce sens are atunci 2 + 3 = 5? Răspuns: această egalitate e o regulă a semnelor care indică ce semn apare în urma aplicării unei operaţii (de adunare) altor două semne. Iar conţinutul său „e exact ceea ce elevii găsesc dificil atunci când învaţă această adunare la ora de matematică”. E vorba de eşecul logicismului de a fundamenta ceea ce nu suportă nicio fundamentare (în speţă operaţia de adunare a numerelor cardinale, ca şi celelalte operaţii – filosoful se mai referă la înmulţire sau împărţire în stilul său specific). În această manieră, numerele naturale sunt consfinţite ca scheme numerice[105] şi adunarea ca relaţie de natură intensionalistă a semnelor numerice.

În propoziţia A: $(\varepsilon||x).\varphi x.\ (\varepsilon|||x).\psi x.\text{Ind.}\supset.(\varepsilon|||||x).\varphi x\vee\psi x$, se observă că relaţia dintre semne există independent de propoziţie. Partea logicistă care o face tautologie se adaugă ca un înveliş la care se poate renunţa. Atâta timp cât relaţiile figurative

[104] L. Wittgenstein, PG, ed. cit., p. 334.
[105] L. Wittgenstein, PR X, §107.

reprezentaţionale (liniuţele) există independent (au sens independent) de ceea ce face ca propoziţia să fie o tautologie[106] înseamnă că pot să am intuiţia directă a relaţiei interne a structurilor fără să mai apelez la decorul logic; se opun aici *procesul aritmetic* cu cel *logic*:

Numeric – Extensional – Structură externă – Logic – Tautologie – sensul propoziţiei caracterizat de extensiune (adunarea *prin* propoziţia A);

Gramatic – Intensional – Structură internă – Matematic – Proces matematic structural (ca intuiţie şi nu ca reunire dintre liniuţe) – sensul propoziţiei caracterizat de intensiune (adunarea *în* propoziţia A).

Cele două şiruri conceptuale nu sunt independente – se referă la *schema numerică a limbajului* în care numerele sunt ceea ce această schemă reprezentaţionează (darstellen[107]) –, ci caracterizează din două perspective abstracte, aceeaşi structură A[108]. Spaţiul gramatical este un cadru lingvistic în care se manifestă structurile numerice şi procesele dintre ele guvernate de reguli, cum e adunarea.

Ar mai fi de adăugat că propoziţiile aritmeticii sunt astfel concepute (cum ar fi tabla adunării, înmulţirii etc.) ca să se aplice direct la propoziţiile limbajului prin intermediul unui „mâner" (Wittgenstein foloseşte expresia *das Werkzeug mit seinem Griff* – „unealta cu mânerul său" – PR X, §106) fără să fie nevoie de o descriere a aplicării lor.

Faptul că propoziţiile matematicii, calculele pot fi intuite direct, fără o analiză a conceptelor, fără a le descrie aplicarea, ci sunt imediat vizibile (reprezentaţionabile) ţine de o posibilitate a limbajului (e ceea ce afirmă PR X, §107 în continuitate directă cu TLP 6.233, 6.2331); dar 6.234 („Matematica e o metodă a logicii") nu mai este valabilă: propoziţia matematică nu e rezultatul analizei logice a limbajului, ci e *self*-evidentă şi rezidă în aplicaţia ei. Dacă în TLP numerele se defineau prin intermediul logicii, acum „nu e vorba decât de o gramatică a numelor de numere"[109].

[106] Se lămureşte de ce spune Wittgenstein în TLP că tautologia nu spune nimic: aceasta e valabil din punct de vedere al extensiunii sale, unde îi pot fi adăugate diverse scheme care sunt echivalente independent de propoziţie; dar din punct de vedere al funcţionării structurale, adică al intensiunii, care caracterizează structura logică, pot să recunosc *în* propoziţia A teorema adunării şi nu *prin* ea (cf. PR X, §103, §104).

[107] Cf. PR X, §107.

[108] Sensul propoziţiei A este alăturarea de beţişoare, o relaţie între semnele numerice, „o punere împreună a extensiunii conceptelor: primele două trăsături din paranteza din dreapta sunt în relaţie 1 la 1 cu primele două din stânga, apoi celelalte 3 trăsături din dreapta care sunt în relaţie 1 la 1 cu cele 3 din paranteza stângă, le reunesc în 5 trăsături care au o funcţie într-un termen şi alta în celălalt termen" (după PR X, §104); şi dacă aş pune un număr greşit de semne în vreunul din termeni, greşeala nu s-ar putea afla prin metode logice, ci comparând structurile.

[109] L. Wittgenstein, PR X, §107.

*

În *Remarks on the Foundation of Mathematics*, Wittgenstein va reveni la ideea de număr cardinal ca proprietate internă a unui concept[110] care ţine de domeniul autonom al matematicului, pe acelaşi plan cu acela „uman” de „a urma o regulă”; drumul a început de la *conceptul formal* din TLP şi a ajuns la *conceptul de tip matematic*, având numărul cardinal ca nucleu exemplificativ. De altfel se va vedea că orice tipuri de numere, inclusiv cele transfinite, sunt „caracteristici ale conceptelor matematice”[111]. Dar nu în raport *natural* matematic, ci provenind dintr-o activitate omenească, cum e cea de „a urma o regulă”:

„Numărul este, cum zice Frege, o proprietate a conceptului – dar în matematică este o caracteristică a unui concept matematic. $\aleph_0$ este o caracteristică a conceptului de număr cardinal; precum şi o proprietate a unei tehnici. $2^{\aleph_0}$ este o caracteristică a conceptului de număr în dezvoltarea zecimală infinită, dar proprietatea cărui număr este acest lucru? Cum s-ar spune: ce gen de concept putem să afirmăm în mod empiric?”[112]. Niciunul! Se evidențiază astfel caracterul exclusivist al domeniului matematic, acela de a conține criterii proprii de coerență, adevăr, verificabilitate, independent de cele fundaționale și gramaticale.

Aspectul *intensionalist* e vădit pe tot parcursul FWM: în PR, numărul cardinal este o „proprietate internă a unei liste” (PR XI, §119), conectat la extensiunea conceptului ca imagine a extensiunii conceptului (cum se vede în PG IV, cap.19), imagine cu caracter sinoptic, *reprezentaţionist* (*übersichtlich*).

ÎN LOC DE CONCLUZII

Wittgenstein renunţă la generalitatea de tip logic, o propune pe cea de tip matematic; tot calculul matematic nu este decât o aplicaţie a acestuia însuşi, nu mai e nevoie să invocăm forma generală a operaţiunii logice; aritmetica e asemănată cu o geometrie mai generală, iar exemplele de reprezentaţionism geometric şi de aritmetică a liniilor sunt date în acest sens. „Numerele naturale nu pot fi definite decât plecând de la formele propoziţionale, independent de adevărul sau falsitatea propoziţiilor concrete” (PR X, §102), deci independent de logică și gramatica naturală.

În ideea continuității filosofice, se observă că sensul propoziţiei care îşi arată sensul (TLP 4.021, 4.022, 4.032) este acum unul propriu matematicii; într-un mod tipic reprezentaționist (*darstellen*), relaţia internă a structurilor matematice poate fi intuită (atunci când de ex. 5 şi 7 fuzionează în exact 12), dar această structură internă nu mai e de tip logic, nu mai are nicio legătură cu Spațiul Logic.

[110] L. Wittgenstein, RFM VII, §42.
[111] *Ibidem*.
[112] *Ibidem*.

Numărul natural nu mai este exponentul unei operaţiuni, ci o imagine a extensiunii conceptelor, dar şi proprietatea internă a unei liste. Aşa cum limbajul are nevoie de o gramatică, numerele au nevoie de o aritmetică şi, cu aceasta, se separă filosofia limbajului de filosofia matematicii. Propoziția matematică e o entitate aparte a realității și se poate reduce la fapte elementare autoevidente cu un statut ontologic aparte (precum erau stările de lucruri tractariene, dar acestea grevate metafizic) ce constituie criteriul domenial al adevărului matematic.

BIBLIOGRAFIE

Ludwig Wittgenstein:

– *Philosophical Remarks* (PR), ed. R. Rhees, trad. Raymond Hargreaves și Roger White, Basil Blackwell Oxford, 1998.

– *Remarques Philosophiques* (PR), ediție postumă îngrijită de Rush Rhees, trad. din limba germană de Jacques Fauve, collection Tel, Gallimard, 1975.

– *Philosophical Grammar* (PG), part.I: *The Proposition and its Sense*; part.II: *On Logic and Mathematics*, ed. Rush Rhees, trad. Anthonny Kenny, Basil Blackwell, Oxford, 1993.

– *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, (RFM), Suhrkamp Verlag, 1984.

– *Remarks on the Foundation of Mathematics*, (RFM), ed. G.H. von Wright, R. Rhees, G.E.M. Anscombe, trad. G.E.M. Anscombe, Basil Blackwell, Oxford, 1998.

– *Remarques sur les fondements des mathématiques*, (RFM), ed. G.H. von Wright, R. Rhees, G.E.M. Anscombe, trad. din limba germană de Marie-Anne Lescourret, Gallimard, 1983.

– *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of mathematics* (LFM), ed. Cora Diamond, the Harvester Press Ltd, 1976.

– *Philosophical Investigation* (PI), ediția a treia, trad. G.E.M. Anscombe, Blackwell Publishing, Oxford, 2001.

– *Dictées de Wittgenstein à Friedrich Waismann et pour Moritz Schlick, Textes Inédits, années 1930*, (DWWS), (traducere din limba germană după texte transcrise plecând de la materiale dictate de Wittgenstein lui Fr. Waismann și Schlick), Presses Universitaires de France, 1997.

– *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle* (WVC), cu notele lui F. Waismann, Blackwell, Oxford, 1979.

– *The Big Typescript: TS 213*, editori și traducători C. Grant Lukhardt și Maximilian A. E. Aue, Blackwell, 2005.

Benacerraf & Putnam (ed.), *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, 1983.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer, *Intuitionism and formalism*, alocuţiune inaugurală la Universitatea din Amsterdam, expusă pe 14 octombrie 1912, trad. Arnold Desden, retipărită cu permisiunea autorului și editorului în *Bulletin of the American Mathematical Society*, 20 nov. 1913, pp. 81-96.

Alonso Church, „A Set of Postulates for the Foundation of Logic", în *Annals of Mathematics*, nr. 33, pp. 346–366 şi nr. 34, pp. 839–864, 1932.

Alonso Church, *The Calculi of Lambda Conversion*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1941.

Haskell Brooks Curry, *Combinatory Logic*, North-Holland Publishing, Amsterdam, vol. I, 1958; vol. II, 1972.

Pasquale Frascollla, *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Routledge, London, New York, 1994.

Iulian Grigoriu, „Filosofia matematicii și eșecul logigist în *Tractatus Logico-Philosophicus*", în rev. *Probleme de Logică*, nr. XXI, Editura Academiei Române, 2018, pp. 67–95.

Grattan Guinness, *The Search for Mathematical Routs, 1870–1940*, Princeton University Press, 2000.

Stephan Körner, *Introducere în Filosofia Matematicii*, trad. Al. Giuculescu, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965.

Anthony Kenny, „The Continuity of Wittgenstein Philosophy", în *Wittgenstein*, Blackwell Publishing, 2006, cap. 12, pp. 173–183.

Mathieu Marion, *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1998.

Alexandru Surdu, „Teoria brouweriană a demonstrației”, în *Neointuiționismul*, Editura Academiei Române, 1977.

Frank Plumpton Ramsey, *The foundations of mathematics*, *Proc. Lond. Math. Soc.* 2, vol. 25, 1925, pp. 338–384.

Friedrich Waismann (*Introduction to Mathematical Thinking*, 1936, retipărit la Frederik Ungar Publishing co., New York, 1951), pe linia FWM, Schlick (cu contribuții în receptarea și dezbaterea TLP), Ramsey (matematician, logician și filosof, primul traducător în limba engleză a TLP), Alice Ambrose (cu studii asupra FWL și FWM).

Hermann Weyl, „Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik”, în *Mathematische Zeitschrift*, nr. 10, pp. 39–79, retipărit şi tradus în limba engleză, *On the New Foundational Crisis in Mathematics* în Mancosu (ed), *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford: Clarendon Press, 1998, pp. 86–122.

Michael Wrigley, *The Continuity of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, ed. K Puhl, Vienna, Verlag Hölder Pichler Tempsky, 1993, pp. 73–87.