FRANZ BRENTANO UND BERTRANDS PARADOXON: EINE NOTIZ MIT 2 TRANSKRIPTIONEN

ADRIAN MAÎTRE

Franz Brentano and Bertrand's paradox: A note with 2 transcriptions. In his later years Franz Brentano dedicated considerable effort to the discussion of Bertrand's problem or paradox, especially so during his Zürich period (1915–1917). In order to avoid „shaking trust" in probability theory and calculus, he tried to solve Bertrand's problem. In a message sent from Zürich to Alfred Kastil on March, 5, 1917 Brentano claimed to have found such a solution. Probability calculations are an important element in Brentano's empiricist theory of knowledge. According to him they should serve to secure (natural) scientific and metaphysical statements. This explains Brentano's interest in Bertrand's problem and his engagement with both Bertrand's and Poincaré's theories of probability.

Keywords: Franz Brentano, Bertrand's paradox, probability theory, Brentano's late years (Zurich period), Brentano's unpublished work

1. EINFÜHRUNG

Bei Bertrands Paradoxon oder Problem[1] handelt es sich um die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine zufällig gewählte Sehne kleiner sei als eine Seite des dem Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks? Bertrand zeigt drei Lösungen auf, welche zu sich widersprechenden Ergebnissen führen. Die Diskussion über das Paradoxon und den sich widersprechenden Wahrscheinlichkeiten ist seit seiner Einführung durch Bertrand vor über 130 Jahren nicht verstummt.

Adrian Maître ✉
Burgdorf, Schweiz
E-mail: adrianmaitre@bluewin.ch

[1] Siehe Joseph Bertrand, *Calcul des probabilité,* Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1889. Mehrfach zitiert in den in Fussnoten 17 und 19 angegebenen Quellen.

Rev. Roum. Philosophie, **68**, *1*, p. 147–159, Bucureşti, 2024

Das Paradoxon hat Brentano in seiner Zürcher Zeit (1915–1917) bis an sein Lebensende wiederholt beschäftigt.[2] Freiherr Michael von Pidoll, welcher Brentano im November 1916 in Zürich besucht hat, macht darauf aufmerksam[3]. Aber auch Carl Stumpf[4] und E. Mandl[5] erwähnen das Thema in ihren Erinnerungen an Franz Brentano. Schliesslich macht Brentano in einer Karte an Kastil vom 5.3.1917 geltend, er habe das Problem nun definitiv gelöst und müsste sich beinahe schämen, dass dies so lange gedauert habe, hätten andere (Poincaré, Boltzmann) sich nicht auch lange vergeblich um eine Lösung bemüht.

Alfred Kastil und Franziska Mayer-Hillebrand haben als Herausgeber und Herausgeberin in den beiden Bänden „Vom Dasein Gottes“[6] und „Versuch über die Erkenntnis“[7] eine aus den Diktaten Brentanos stammende Anmerkung[8] eingefügt, welche das Paradoxon als Gegenstand von Gesprächen zwischen Brentano und dem Physiker Boltzmann erwähnt. Die Stelle in „Vom Dasein Gottes“ ist besonders prominent, es handelt sich um das Diktat von 1915 zum „Gedankengang beim Beweise für das Dasein Gottes“ (in der Folge „Gedankengang“)[9].

[2] Dies hat sich in den Diktaten EL 13, 15 und 17 bis und mit 22 niedergeschlagen, welche zwischen Oktober 1916 und Januar, eventuell sogar noch März, 1917 entstanden sind. Wichtig ist auch das Manuskript Th 24, siehe dazu Kapitel 4 und 5 dieser Notiz. Ausserdem ist das Manuskript Th 34 sowie das Diktat „Über unsere Axiome“ vom 16.2.1916 zu erwähnen. Siehe für die erwähnten Manuskripte die Bestände der Houghton Library mit Ausnahme des Diktats über Axiome, online abrufbar im Franz Brentano Archiv Graz. Anhang 1 bietet eine Übersicht von Manuskripten und Abschriften, die sich auf das Paradoxon beziehen.

[3] Michael Pidoll, «Zur Erinnerung an Franz Brentano», *Pädagogische Monatshefte*, 68, 1918, S. 467.

[4] Carl Stumpf, «Erinnerungen an Franz Brentano», in Oskar Kraus (Hrsg.), Franz Brentano. *Zur Kenntnis seines Lebens und seiner Lehre*, München, Beck. 1919, S. 141. Gemäss Stumpf könnte Brentano sich bereits seit 1911 mit dem Bertrand’schen Problem gelegentlich befasst haben, allenfalls bereits seit 1905.

[5] E. Mandl, «Aus meinen Erinnerungen an Franz Brentano», *Internationale Rundschau*, 3, 1918, S. 292. Mandl sieht die Beschäftigung Brentanos mit dem Bertrand’schen Paradoxon im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitslehre und ihrer Bedeutung (bei Brentano) für die Gottesbeweise.

[6] Franz Brentano, *Vom Dasein Gottes* (1929), Hamburg, Meiner, 1980, S. 447–448.

[7] Franz Brentano, *Versuch über die Erkenntnis*, Hamburg, Meiner, 1970, S. 140–141. Die Anmerkung ist in diesem Band einem Text beigefügt, der ursprünglich aus Brentanos Manuskript «Über unsere Axiome» von 1916 stammt. Das Manuskript ist als Abschrift erhalten. In dieser ist aber die Anmerkung <u>nicht</u> vorhanden.

[8] Diese Anmerkung ist im Manuskript «Gedankengang» enthalten, aber nicht in der Abschrift «Über unsere Axiome», welche für den Band «Versuch über die Erkenntnis» beigezogen wurde. Dies ist ein Hinweis auf weitgehende herausgeberische Eingriffe von Kastil und Mayer-Hillebrand.

[9] Dort wie auch andernorts kündigt Kastil an, eine Lösung Brentanos für das Paradoxon noch zu veröffentlichen, was aber nicht erfolgt ist, auch nicht durch Franziska Mayer-Hillebrand. Aufgrund der vorgesehenen Veröffentlichung hat Kastil wohl die Wiedergabe der Anmerkung im Band «Vom Dasein Gottes» an wichtiger Stelle gekürzt (siehe die entsprechende Anmerkung Kastils in Brentano, *Vom Dasein Gottes*, S. 531).

Diese Notiz ist auf das Interesse Brentanos am Paradoxon sowie dessen Stellenwert in seinen erkenntnis- und wissenschaftstheoretischen Überlegungen ausgerichtet. Es wird kein direkter Beitrag zur „Lösung" des Paradoxons angestrebt.[10]

2. WARUM WAR DAS PARADOXON FÜR BRENTANO WICHTIG?

In der bereits erwähnten Anmerkung über das Paradoxon im „Gedankengang" gibt Brentano selber einen *formalen* Grund für die Relevanz desselben an. Dieser hat mit einer Argumentationsfigur zu tun, derer sich Boltzmann in der Diskussion mit Brentano über das Paradoxon bedient habe[11] und welche ähnlich sei der Argumentationsfigur, welche Brentano in der Widerlegung der Annahme benutze, es gäbe einen absoluten Zufall.

Doch dieser Grund reicht nicht aus, um das lebhafte Interesse Brentanos am Paradoxon zu verstehen. Es scheint, dass dafür folgender *materialer* Grund die Hauptrolle gespielt hat. Die Wahrscheinlichkeitslehre hat für Brentano einen hohen Stellenwert in der Erkenntnistheorie sowie in der Absicherung wissenschaftlicher und metaphysischer[12] Aussagen. Das Bertrand'sche Paradoxon scheint die Verlässlichkeit der Wahrscheinlichkeitslehre in Frage zu stellen. Es muss Brentano widerstrebt haben, eine Unentscheidbarkeit zwischen Lösungen einer Wahrscheinlichkeitsberechnung zugestehen zu müssen. Er hielt es geradezu für „chockant", dass Bertrand behauptete, korrekte Lösungen führten zu sich widersprechenden Wahrscheinlichkeiten.[13] Und so setzte er sich mehrfach daran, das „Übersehen" Bertrands in zumindest einer seiner Lösungsvarianten herauszufinden, bzw. die richtige Lösung zu definieren. Brentano hat sich mit dem Problem Bertrands im Rahmen seiner Auseinandersetzung und Kritik der Wahrscheinlichkeitslehre von Bertrand und Poincaré beschäftigt, welchen gleichfalls mehrere – zum Teil publizierte – Diktate gewidmet sind.[14] Eines dieser Diktate, 1916 in Zürich verfasst[15], wurde durch Alfred Kastil in den Band „Versuch über die Erkenntnis" aufgenommen. Darin setzt Brentano sich mit Argumenten auseinander, welche darzulegen suchen, dass „nicht in jedem Falle von Unsicherheit von […]

[10] Eine kritische Bewertung des auf Bertrand selbst abgestützten Lösungsansatzes von Brentano hat Nicholas Shackel unternommen: «Brentano's solution to Bertrand's paradox», in dieser Nummer.

[11] Dabei sei es um Zweifel Boltzmanns am Konzept des Kontinuums gegangen, welche durch die widersprüchlichen Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsberechnungen Bertrands genährt würden.

[12] Ganz besonders auch zur Herleitung und Geltung des Kausalitätsprinzips. Siehe Adrian Maître, „Brentano über Herleitung und Geltung von Kausalität", *Rivista di Filosofia Neo-Scolastica,* Nr. 4, 2019, S. 863–874.

[13] Diktat EL 21 vom 24.1.1917. Annehmbar wäre laut Brentano gewesen, wenn Bertrand behauptet hätte, das Problem sei nicht gelöst oder nicht lösbar.

[14] Vielleicht ist Brentano überhaupt durch seine Beschäftigung mit Poincaré auf Bertrand und das Paradoxon gestossen.

[15] Diktat EL 15 vom 11.10.1916.

bestimmten Grössenverhältnissen der Wahrscheinlichkeit gesprochen werden könne“.[16] Unter solchen Beiträgen führt er dort auch das Bertrand’sche Paradoxon auf.

3. ZUM STATUS DES PARADOXONS UND ZUR AKTUELLEN DISKUSSION

Eine häufig vertretene Auffassung ist, dass das Paradoxon weiterhin bestehe, die 3 von Bertrand präsentierten Lösungen korrekt seien und dadurch auch unterschiedliche Werte berechnet werden können für die Wahrscheinlichkeit, mit welcher eine Sehne kleiner ist als die Seite des dem Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.[17] Es könne aber auch gesagt werden, dass es sich gar nicht um ein Paradoxon handelt, da sich die unterschiedlichen Ergebnisse aus unterschiedlichen Modellen für die zufällige Auswahl einer Kreissehne ergeben und jeweils korrekt sind.[18]

Allerdings hat es auch Versuche gegeben, eine der 3 Lösungen zu privilegieren (siehe die in Fussnoten 17 und 19 genannten Quellen). Die Diskussion hierzu sowie weiterführende, auch philosophische, Betrachtungen über Lösungen und Implikationen des Problems laufen weiter.[19] In einer neuen Publikation[20] widmet Nicholas Shackel dem Paradox eine umfassende Darstellung, betont die Unlösbarkeit desselben und zieht Schlussfolgerungen für die Wahrscheinlichkeitslehre.

4. BRENTANOS LÖSUNG

Brentano ist zur Überzeugung gelangt, das Bertrand’sche Problem gelöst zu haben. Der Umstand, dass Brentano die Lösung des Problems gefunden hat oder gefunden zu haben glaubt, ist nicht ohne Bedeutung für ihn. Er stellt dazu fest:

[16] Franz Brentano, *Versuch über die Erkenntnis*, S. 241.

[17] Siehe Wikipedia-Artikel zu „Bertrand-Paradoxon (Wahrscheinlichkeitstheorie), ferner: University of Oslo, www.uio.no, Bertrand paradox (probability) oder Universität Heidelberg, https://funfacts.mathi.uni-heidelberg.de zu „Bertrand’sches Sehnen-Paradoxon“.

[18] Mündliche Auskunft von Prof. Lutz Dümbgen. Institut für Mathematische Statistik und Versicherungslehre, Universität Bern. 22.8.2023.

[19] Siehe Nicholas Shackel, “Bertrand’s Paradox and the Principle of Indifference”, *Philosophy of Science*, 74, 2007, S. 150-175. Darrell Rowbottom, “Bertrand’s paradox revisited : Why Bertrand’s solutions are all inapplicable”, *Philosophia Mathematica*, 21, 2013, S. 110–114. (Beide zitiert in University of Oslo, www.uio.no, Bertrand paradox (probability)). Besonders aber: Nicholas Shackel, *Bertrand’s Paradox and the Principle of Indifference,* New York und London, Routledge, 2024. Der Autor dankt Professor Nicholas Shackel, Cardiff, für den Austausch über das Thema.

[20] Nicholas Shackel, *Bertrand’s Paradox and the Principle of Indifference*. Das Buch enthält auf den Seiten 58 und 59 bildliche Darstellungen der 3 Lösungsansätze Bertrands, sowie Bezeichnungen für diese («angle case», «direction case» und «midpoint case»). Ich verwende diese Bezeichnungen in vorliegender Notiz an gewissen Stellen.

«So kommt man denn wirklich hier zu einer einheitlichen voll gesicherten Lösung und das Vertrauen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung bleibt unerschüttert.»[21]

Er hält die dritte Lösung von Bertrand (den «midpoint case»[22]) für die richtige, die beiden anderen litten «an einem schweren Übersehen»[23]. Der Kern der Argumentation Brentanos basiert auf dem Umstand, dass nur die dritte Lösung Bertrands die Gesamtheit der Sehnen berücksichtige[24], die beiden anderen nur eine «Gruppe», welche «vervielfältigt» werden müsse, um zur Gesamtheit der Sehnen zu gelangen[25]. Brentano[26] hält fest, dass solange die beiden Lösungen, welche Teilmengen der Sehnen betreffen, sich auch lediglich auf diese Teilmengen beziehen, «zunächst kein Widerspruch darin gefunden werden [kann], wenn ein vollkommen fehlerfreies Verfahren» zu unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitswerten führt. «Das was die Differenz der Ergebnisse bei den zwei ausgewählten Gruppen [Teilmengen] paradox erscheinen lässt, ist aber, dass sie genau in derselben Weise vervielfältigt, beide zu der Gesamtmenge der Sehnen eines Kreises zu führen scheinen.»[27]

Brentanos Lösungsstrategie besteht darin, (1) zu zeigen, dass die dritte Bertrand'sche Lösung richtig sei aufgrund des Umstands, dass diese die Gesamtheit der Sehnen einschliesst und eine eineindeutige Beziehung zwischen Sehnen und Punkten im Kreis besteht[28], sowie (2) zu zeigen, dass die beiden anderen Lösungen Bertrands das gleiche Verhältnis kleinerer zu grösseren Sehnen abwerfen, sofern die Erhebung der Anzahl der Sehnen auf die Gesamtheit der Sehnen richtig vorgenommen wird.[29]

[21] Th 24, Seite 8 (80266).

[22] Siehe Fussnote 20.

[23] Th 24, Seite 6 (80263).

[24] Da in dieser Lösung die Sehnen über ihre Mittelpunkte definiert werden, diese – mit Ausnahme des Mittelpunktes des Kreises und der Punkte der Peripherie – eineindeutig allen möglichen Sehnen zugeordnet sind und dann wiederum eindeutig entschieden werden kann, ob sie Elemente des Kreises mit dem halben Radius oder der verbleibenden Fläche hin zum Kreis mit ganzem Radius sind.

[25] Nebst diesem Argument bezüglich Teil- und Gesamtmenge der Sehnen und diesbezüglicher Bedingungen für die Methode der zufälligen Auswahl einer Sehne, bringt Brentano auch Überlegungen zum Kontinuumsbegriff und Dichtigkeit ins Spiel.

[26] In Th 24, Seite 5.

[27] Th 24, Seite 5. Dieselbe Weise der Vervielfältigung scheint sich auf das Verschieben eines Punktes der Peripherie des Kreises entlang der Peripherie zu beziehen: Einmal der Schnittpunkt des Radius mit der Peripherie, auf welchem Radius die Sehnen senkrecht stehen, ein andermal der Ausgangspunkt der Sehnen, welcher gleichzeitig als eine Spitze des eingeschriebenen Dreiecks dargestellt wird.

[28] Mit Ausnahme des Mittelpunktes des Kreises und der Punkte des Kreisumfangs.

[29] Auf dem Weg zu dieser Lösung hat Brentano vorübergehend auch andere Ansätze berücksichtigt (den *direction case* und sogar eine von Bertrand nicht vorgetragene Lösung). Siehe dazu die Tabelle in Anhang 1.

5. ZUR QUELLENLAGE

Brentano hat die aus seiner Sicht definitive Lösung des Problems in den beiden Diktaten EL 22[30] und Th 24[31] (vom 24. Juni 1915) dargelegt. In EL 22 wird die Lösung genannt, in Th 24 wird diese entwickelt, einschliesslich dem von Brentano angestrebten Nachweis des «Übersehens» von Bertrand in seinen beiden übrigen Lösungen.

Beide Quellen werfen gewisse Fragen auf. Im Falle von EL 22 hat Alfred Kastil selber auf dem Umschlag des Manuskripts vermerkt: «Stammt dieses Diktat aus Bs. letzten Tagen? cf. Karte an Kastil vom 5/3 1917…Frau Brentano fragen!»[32].

Im Falle von Th 24 stellt sich die Frage, ob die lange Anmerkung, welche die Lösung des Betrand'schen Problems enthält, tatsächlich auch vom Juni 1915 stammt – so wie der Haupttext des Diktats «Gedankengang» – oder ob sie später eingefügt worden ist. Gegen das Erste spricht, dass Brentano ausdrücklich festhält, dass er die Lösung spät gefunden habe, wie sich dies auch im Zeugnis von Pidoll und der Karte an Kastil niederschlägt. Ein indirektes Indiz für das Zweite (später eingefügt) scheint ausserdem zu sein, dass im Diktat Th 24 über den «Gedankengang» – und nachfolgend in dessen veröffentlichter Version – Umstellungen und Auslassungen an der fraglichen Anmerkung vorgenommen wurden.[33]

6. SCHLUSSFOLGERUNG UND WEITERFÜHRENDE SCHRITTE

Es wurde versucht, das Interesse Brentanos an Bertrands Paradoxon darzustellen und den Grund der Präsenz des Themas in Brentanos letzten Diktaten zu klären. Dieses hat mit dem Gewicht zu tun, welches Brentano der Wahrscheinlichkeitslehre und -rechnung in der Sicherung wissenschaftlicher und metaphysischer Aussagen zuschreibt. Das Bertrandsche Paradoxon scheint die Verlässlichkeit der Wahrscheinlichkeitslehre zu beeinträchtigen. Dies hat Brentano noch bis in die Jahre 1916 und 1917 zur Suche einer Lösung für das Paradoxon motiviert.

Ausgehend von der Darstellung in dieser Notiz bestehen folgende Fragen.

1. Ist die wichtige Anmerkung, welche sich auf das Bertrand'sche Problem bezieht, nachträglich ins Manuskript „Gedankengang" von 1915 eingefügt worden und stammt eigentlich von 1917?

[30] Siehe die Transkription im Anhang 2 dieser Notiz.
[31] Siehe die Transkription im Anhang 3 dieser Notiz.
[32] Eine allfällige Antwort von Emilie Brentano scheint nicht bekannt zu sein.
[33] Siehe oben, Fussnote 9.

2. Wie ist Brentanos Einordnung des Paradoxons in die Wahrscheinlichkeitslehre zu beurteilen? Und besonders: Ist die Lösung, welche Brentano für das Paradoxon gefunden zu haben glaubt, im Lichte der aktuellen Diskussion überzeugend?[34]

ANHANG 1.

MANUSKRIPTE BRENTANOS, WELCHE SICH DEM BERTRAND'SCHEN PARADOXON WIDMEN

Nebst den Werkmanuskripten, welche in der Houghton Library aufbewahrt sind und welche das Franz Brentano Archiv in Graz online zugänglich macht, kommt Bertrands Paradoxon gelegentlich auch in der Korrespondenz Franz Brentanos in seiner Zürcher Zeit vor. Unter anderem erwähnt er auch, dass er die damit verbundenen Fragen mit Mathematikern in Zürich besprochen habe.

Signatur	**Titel (Anzahl Seiten)**	**Datum**	**Zum Inhalt, insbesondere die Lösung betreffend**
EL 13	Poincaré. Von der Wahrscheinlichkeit (9)	17.11.1916	Nur teilweise zu Bertrands Paradox. Brentano bevorzugt den „direction case“[35] als alleinige Lösung.
EL 15	Von der Wahrscheinlichkeit (34)	11.10.1916	Nur teilweise zu Bertrands Paradox. Veröffentlicht.[36]
EL 17*	Zum Bertrand'schen Problem (9)	24.10.1916	Brentano spricht sich gegen den „midpoint case“ aus und neigt zum „direction case“ als alleinige Lösung. Überlegungen zur „Dichtigkeit“.
EL 18*	Zu Bertrand, calcul des probabilités (9)	5.11.1916	Manuskript scheint unvollständig zu sein. Brentano bevorzugt den «direction case» als alleinige Lösung. Überlegungen Brentanos zur Einbettung des Paradoxons in breitere Fragen der Wahrscheinlichkeitslehre.
EL 19*	Zum Bertrand'schen Wahrscheinlichkeits-Problem (5)	7.1.1917	Unvollständig? Brentano spricht sich **gegen** den „direction case“ als alleinige Lösung aus. Argumente der „Dichtigkeit“ in Funktion des Winkels und der Länge der Sehnen treten auf.
EL 21*	Zum Bertrand'schen Sehnenproblem (5)	24.1.1917	Argumente der „Dichtigkeit“ in Funktion des Winkels und der Länge der Sehnen treten auf. Keine Aussage zur (alleinigen) Lösung.
EL 22	Bertrand'sches Problem (3)	März 1917	Brentano spricht sich **für** den „midpoint case“ als alleinige Lösung aus. Siehe Anhang 2.

[34] Siehe dazu die Analyse von Nicholas Shackel in dieser Nummer.

[35] Für die Terminologie «direction case» oder «midpoint» siehe Nicholas Shackel, *Bertrand's Paradox and the Principle of Indifference*, S. 58–59.

[36] Franz Brentano, *Versuch über die Erkenntnis*, S. 237–258.

Signatur	Titel (Anzahl Seiten)	Datum	Zum Inhalt, insbesondere die Lösung betreffend
Th 24**	Gedankengang beim Beweise für das Dasein Gottes (46)	24.6.1915	Nur teilweise zu Bertrands Paradox (in einer Anmerkung zum längeren Manuskript). Brentano spricht sich **für** den „midpoint case“ als alleinige Lösung aus. Offene Frage, ob die Anmerkung nicht späteren Datums ist. Siehe Anhang 3.
Th 34***	Zur Anmerkung**, Seite 1 des Manuskripts „Über das Dasein Gottes“ (5)	oD,	Versehen mit der Bemerkung „ausgeschieden“. Brentano bringt hier ein weiteres Verhältnis (5/7) zur Sprache.
*	Über unsere Axiome (32)	16.2.1916	Nur kurz zu Bertrands Paradox (Abschnitt 32). Als Lösung wird 5/7 genannt.

*Abschriften aus Prag. Zur Verfügung gestellt durch das Franz Brentano Archiv Graz. Mein Dank dafür geht an dessen Leiter, Thomas Binder. Übrige Titel: Franz Brentano Archiv Graz: online.

**Die Überlegungen zum Paradox sind als Fussnote integriert. Diese ist möglicherweise zu einem späteren Zeitpunkt eingefügt worden, wohl erst 1917.

***Dieses Manuskript bezieht sich gemäss Umschlag des Manuskripts auf Th 24 und die dort enthaltene Anmerkung zu Bertrands Paradox. Die Bemerkung „ausgeschieden“ ist nicht begründet. Gemäss den Metadaten des Archivs sind die Handschriften im Text und auf dem Umschlag unbekannt.

ANHANG 2:

VOLLSTÄNDIGE TRANSKRIPTION DES MANUSKRIPTS EL 22, QUELLE: FRANZ BRENTANO ARCHIV GRAZ (HOUGHTON LIBRARY)[37]

Angaben zur Transkription

Transkription: Adrian Maître (AM)
[ ] = Ergänzt durch AM
----- = unleserlich/unverständlich (éin Wort auf Seite 3)

Hervorhebung durch *Kursivdruck*: AM. Erfolgt als Hinweis auf die vermutete Lösung des Bertrand’schen Paradoxon/Problems, worüber Brentano in seiner Karte an Alfred Kastil vom 5. März 1917 berichtet. Siehe dazu auch Michael Pidoll, „Zur Erinnerung an Franz Brentano“, *Pädagogische Monatshefte*, 68, 1918, p. 467.

Seite 1: Umschlag

(März 1917?)
Logik Wahrscheinlichkeit

[37] Aus den Metadaten von EL 22: „Diktat, Handschrift Emilie Brentano, Umschlag Kastil, Besitzer: Franz Brentano Foundation, Boston“

E u. L 22
Bertrandsches Problem.

Stammt dieses Diktat aus Bs. letzten Tagen? cf. Karte an Kastil vom 5.3.1917. Frau Brentano fragen!
Abgeschrieben
(10215-0)

Seite 2 (10215)

1. *Jeder Punkt einer Kreisfläche ist, wenn man vom Mittelpunkt und Peripherie absieht, Mittelpunkt einer und einer einzigen Sehne; und hieraus folgt, dass die Menge der möglichen Sehnen der Menge der Punkte im Kreise gleich zu setzen ist.*

Wollte man dagegen einwenden, dass dieser Schluss nicht zulässig sei, weil die Gesamtheit der Punkte einer Geraden a b, wenn man sie unter einem rechten Winkel gerade Linien, die einander parallel sind, halbieren lasse, ein grösseres Quantum von Linien halbieren, als wenn man sie unter einem schiefen Winkel sie [sic] Parallellinien halbieren lässt, so ist der Einwand leicht als nichtig zu erweisen. Denkt man nämlich die Linie a b in beliebig kleiner Dicke, so zeigt sich, dass von den geschnittenen Linien bei schiefer Kreuzung jede in vergrösserter Länge in die Linie a b fällt, was dann als ein genauer Ausgleich für das geringere Quantum der Parallellinien sich darstellt. Man sieht also, dass wenn es sich um Punkte einer Fläche handelt, nicht ebenso wie, wo es sich um Punkte einer Linie handelt, darauf Rücksicht zu nehmen ist, in welcher Richtung die Linien die einzelnen Punkte treffen.

2. *Hieraus ergibt sich die Rechtfertigung der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass die Sehne eines Kreises kleiner oder grösser als die Seite des einzuschreibenden regelmässigen Dreiecks sei nach dem Verhältnis des Flächeninhalts des Kreises mit halbem Radius zur Differenz von ihm und dem Kreise mit ganzem Radius, also wie 1 zu 3*[38]*.*

3. Als Lösung der Frage nach dem Verhältnis der Sehnen eines Quadrats, welche zwei anliegende und zwei gegenüberliegende Seiten verbinden, findet man 1 : 1. Die Sehnen, welche einander anliegende Seiten verbinden, sind gleich der Punktmenge der Quadratfläche. Diejenigen unter ihnen, welche kleiner als die Quadratseite sind, sind gleich einer Kreisfläche, die ein[em] Radius der halben Quadratseite gleich ist, diejenigen, die

Seite 3 (10216)

grösser sind, gleich der Punktmenge einer Figur, welche gebildet wird, wenn man die vier Viertel der Peripherie dieses Kreises ------ miteinander verbindet. Die gegenüberliegende Seiten verbindenden Sehnen sind in ihrer Gesamtheit = 4 gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken, deren Hypotenuse die Seite des Quadrats ist.

[38] Das Verhältnis müsste umgekehrt dargestellt werden: 3 (kleiner) zu 1 (grösser). Siehe Manuskript Th 24, Seite 7, Ende erster Abschnitt.

ANHANG 3: TEILTRANSKRIPTION DES MANUSKRIPTS TH 24 VOM 24.6.1915: FUSSNOTE ZUM BERTRANDSCHEN PROBLEM, SEITEN 6→5→7→8 [SIC], QUELLE: FRANZ BRENTANO ARCHIV GRAZ (HOUGHTON LIBRARY)[39]

Angaben zur Transkription

Transkription: Adrian Maître (AM)

Die Transkription beschränkt sich auf den bisher unveröffentlichten Teil der Anmerkung.

Interpunktion ohne Bedeutungsänderung an wenigen Stellen angepasst an heutige Regeln und/oder Erwartung der Leser.

[ ] = Ergänzt durch AM

{ } = Teil der Fussnote, die in Brentano, *Vom Dasein Gottes*, S. 447–448 bereits veröffentlicht wurde. Es besteht eine kleine Differenz zum Manuskript, wo es – erste Zeile - heisst: „…ganz derselbe Schluss, den wir…“, statt „analog“.

Das Thema dieses wichtigen Diktats (Th 24) ist die Beweisführung des Daseins Gottes. Bertrands Paradoxon wird dort in einer längeren Fussnote behandelt. Der Herausgeber des Bandes *Vom Dasein Gottes* (Alfred Kastil) hat die Fussnote nicht vollständig veröffentlicht und insbesondere den Lösungsteil weggelassen, um – wie er ankündigt – Bertrands Paradoxon und die Lösung, die Brentano vorgeschlagen hat, zu einem späteren Zeitpunkt zu veröffentlichen. Dies ist jedoch nicht erfolgt.

Seite 6 (80263)

{…So macht er [Boltzmann] denn hier einen Schluss, ganz analog, wie den wir im Text gemacht haben. Und in der Tat könnte man ihn auch in seinem Fall nicht ablehnen, und die Bertrandsche Erörterung wäre gegen die Möglichkeit eines Kontinuums entscheidend, wenn sich in Wahrheit in keine der drei Ausführungen ein Fehler eingeschlichen hätte.}[40]
Das ist aber nicht der Fall, vielmehr ist nur die eine fehlerfrei, während die anderen beide an einem schweren Übersehen leiden.

Seite 5[41] (-)

Wenn man von den drei Ausführungen Bertrands diejenige bei welcher er zu dem Wahrscheinlichkeitsverhältnis 1:1 und diejenige bei welcher er zu dem 1:2 gelangt, vergleicht, so findet man, dass sie darin übereinstimmen, dass sie zunächst eine Gruppe von Sehnen des Kreises für sich allein ins Auge fassen, dass sie sich aber dadurch unterscheiden, dass bei jeder von ihnen diese

[39] Aus den Metadaten von Th 24: «Diktat, Handschrift Emilie Brentano, Umschlag Kastil, Besitzer: Franz Brentano Foundation, Boston».

[40] Bis zu dieser Stelle ist die Anmerkung in Franz Brentano, *Vom Dasein Gottes*, publiziert.

[41] Die Reihenfolge der Seiten entspricht dem Manuskript.

Gruppe eine andere ist. Bei der Ausführung, die Bertrand zu dem Verhältnis 1:1 führte, handelte es sich um die Gruppe von Sehnen, welche auf ein und demselben Diameter lotrecht stehen; bei der, welche ihn zum Verhältnis 1:2 gelangen liess, um die Gruppe derer, welche einen Ausgangspunkt in der Peripherie gemeinsam haben. Da [es] sich so um ganz verschiedene Gruppen handelte, so kann zunächst kein Widerspruch darin gefunden werden, wenn ein vollkommen fehlerfreies Verfahren bei der einen zu dem Ergebnis führt, dass von der besagten Gruppe eine gleiche Menge denkbarer Sehnen grösser und eine gleiche Menge kleiner als die Seite des einzuschreibenden gleichseitigen Dreiecks gefunden wird, während bei der anderen ihr Verhältnis als das [sic] 1:2 sich herausstellt. Das, was die Differenz der Ergebnisse bei den zwei ausgewählten Gruppen paradox erscheinen lässt, ist aber, dass sie genau in derselben Weise vervielfältigt, beide zu der Gesamtmenge der Sehnen eines Kreises zu führen scheinen. Wenn wirklich das Verfahren der Vervielfältigung bei beiden in der Art ein gleiches wäre, dass bei dem Übergang von Fall zu Fall von den sich korrespondierenden Sehnen die, welche grösser als die Dreiecksseite und die welche kleiner als die Dreiecksseite sind, in allen ihren Teilen oder wenigstens durchschnittlich in eine gleiche Distanz verlegt würden, wie die, welche den Sehnen welche kleiner als die Dreiecksseite sind, gegenüber den ihnen korrespondierenden zukommt, so wäre gegen den Schluss von der Gruppe der Sehnen auf die Gesamtheit der Sehnen nichts einzuwenden. Anders im entgegengesetzten Falle. Dies also muss hier untersucht werden. Bertrand aber hat dies ganz übersehen und wir müssen hier das von ihm versäumte nachholen.

Fassen wir zunächst die Ausführung, bei der Bertrand zu dem Verhältnis 1:1 gelangt ist, ins Auge. Dieses hat sich, wie gesagt, zunächst für die zu ein und demselben Diameter lotrecht stehenden Sehnen ergeben. Will man darauf von der Gruppe zur Gesamtheit der Sehnen des Kreises überhaupt gelangen, so muss man von einem Diameter zum anderen übergehen und ebenso von den ihn zu den den anderen Diameter senkrecht schneidenden Sehnen; und hat man dies getan, so muss man sich fragen, ob von den sich korrespondierenden Sehnen diejenigen, die grösser und diejenigen, welche kleiner als die Dreiecksseite sind, in gleiche oder ungleiche Distanzen verschoben erscheinen. Offenbar ist das letztere der Fall und zwar in der Art, dass die Sehnen, welche kleiner als die Dreiecksseite sind, durchschnittlich in ihrem Mittelpunkt einander dreimal so fern sind, als die grösseren. Dementsprechend zeigt sich auch, dass wenn man den Diameter, den die Sehnen lotrecht schneiden, im Kreise rotieren lässt, die Geschwindigkeit seiner Bewegung in dem Teile, auf welchen die kleineren Sehnen senkrecht stehen, durchschnittlich dreimal so gross ist, als die des Teiles, auf welchem die grösseren stehen. Wenn dem nun so ist, so ist es offenbar, dass das für die Gruppe der Sehnen, die lotrecht zu einem Diameter stehen, gefundene Verhältnis 1:1 keine einfache Übertragung auf die Gesamtheit der Sehnen überhaupt zulässt, da vielmehr, wenn man auf die Dichtigkeit der Lagerung der Sehnen achtet, die erstere Einheit mit 1, die zweite mit 3 multipliziert werden muss. Und tut man dies, so kommt man genau zu dem Resultat, zu welchem Bertrand bei seinem dritten Verfahren gelangt ist, welches an einem ähnlichen Übersehen nicht leidet. Man hält sich nämlich hier einfach an die Menge der Mittelpunkte der Sehnen, welche (da man von den Punkten der Peripherie und dem Zentralpunkt absehen kann) mit der Gesamtmenge der Punkte

Seite 7 (80264)

der Kreisfläche zusammenfällt. Jeder von ihnen ist ja der mögliche Mittelpunkt einer und einer einzigen Sehne. Da nun alle Punkte, die innerhalb eines mit dem halben Radius beschriebenen konzentrischen Kreises liegen, Mittelpunkte von möglichen Sehnen sind, die grösser sind als die Dreiecksseite, und alle, die ausserhalb desselben liegen, Mittelpunkte von möglichen Sehnen sind, die die Dreiecksseite in ihrer Grösse nicht erreichen, so zeigt sich, dass das Grössenverhältnis der Menge der möglichen Sehnen, die grösser, zu jenen, die kleiner als die Dreiecksseite sind, sich dem der Grösse der kleineren Kreisfläche zu der Fläche zwischen ihrer Peripherie und der des grösseren Kreises entspricht, d.h. sie verhalten sich wie 1:3.
Es bleibt nun nur noch übrig, den Fehler bei der Ausführung, die Bertrand zu dem Verhältnis 1:2 geführt hat, aufzudecken. Auch hier finden wir dasselbe Versäumnis. Er hat das für die Gruppe der Sehnen, welche den Ausgangspunkt in der Peripherie gemeinsam haben, gefundene Resultat ohne weiteres auf die Gesamtheit aller Sehnen übertragen, weil von jeder Sehne gilt, dass sie einer Gruppe von Sehnen, welche einen Ausgangspunkt in der Peripherie gemeinsam haben, angehört, ohne sich im Geringsten darum zu kümmern, ob nach Verlegung des Ausgangspunktes von den einzelnen Sehnen, wenn man auf alle ihre Teile achtet, sicher ist, dass nicht die einen mehr die anderen weniger verschoben und auseinander gerückt erscheinen. Sobald man dies tut, bemerkt man, dass dies wirklich auch hier, wenn auch nicht in demselben Masse, wie bei der Ausführung, welche von der Gruppe der einen Diameter lotrecht schneidenden Sehnen ausgeht, der Fall war. Auch hier zeigen sich die Verschiebungen bei den grösseren Sehnen kleiner, als bei den kleineren; und darum muss der Fehler, der bei der unvorsichtigen Verallgemeinerung begangen war, nach derselben Seite liegen, wie denn wirklich das Verhältnis 1:2 noch immer hinter dem wahren Verhältnis 1:3 zurücksteht. Dass aber das Ergebnis nicht im gleichen Mass verfehlt ist, weist darauf hin, dass, wie man bei näherer Untersuchung findet, der Unterschied der Entfernungen, in welche man die einander korrespondierenden grösseren und kleineren Sehnen verlegt, nicht so gross ist, wie in dem früheren Fall. War das durchschnittliche Verhältnis 1:3, so ist es hier wie 1:3/2, was, wenn man es mit dem Verhältnis 1:2 in Verbindung bringt, wiederum das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit, dass die Sehne grösser oder kleiner als die Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks sei, als das 1:3 erkennen lässt.

Seite 8 (80265)

So kommt man denn wirklich hier zu einer einheitlichen, voll gesicherten Lösung und das Vertrauen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung bleibt unerschüttert.
Ich will diese Betrachtung nicht schliessen, ohne die Frage nach der Wahrscheinlichkeit aufzuwerfen, dass eine im Innern eines Kugelraumes

gegebene, zwei Punkte seiner Oberfläche verbindende gerade Linie grösser oder kleiner als die Seite des grössten in der Kugel einzuschreibenden gleichseitigen Dreiecks sei. Offenbar gilt auch von ihr, dass sie Sehne von einem und einem einzigen grösstmöglichen Kreise sei, der in der Oberfläche der Kugel zu unterscheiden ist. Bedenkt man aber nun auch noch, dass wenn dieser Kreis sich um einen Diameter dreht, der parallel zur Sehne gezogen wird, die grösseren Sehnen weniger als die kleineren vervielfältigt werden, so wird man dazu geführt, die Menge der möglichen Fälle für die Sehnen, die grösser sind, als die Dreickseite gegenüber der für die kleineren, nochmals im Verhältnis von 1 zu 3 herabzusetzen und so wird sich denn für die Wahrscheinlichkeit, dass die in Rede stehende gerade Linie grösser als die Dreieckseite sei der Bruch 1/9 ergeben.