DESPRE „PRINCIPIUL CONTINUITĂŢII" LA ARISTOTEL ŞI LEIBNIZ

MARIUS AUGUSTIN DRĂGHICI

Abstract. Our paper attempts to show that certain logical outcomes of Aristotle's understanding of the *continuum* (relativization of the universal validity of the law of noncontradicton and of the law of excluded middle, partially assumed by Leibniz) are present in both nonstandard analysis and SIA (smooth infinitesimal analysis) wherein the transition from classical logic to intuitionist has one become obvious even since Charles Sander Peirce and Jan Brower. In both Aristotle and SIA, solving most of the paradoxes appears to consist in certain constraints generated by the continuum – discrete relation.

Keywords: Aristotle, Leibniz, continuum, infinite, nonstandard analysis, smooth infinitesimal analysis.

Se pare că ideea de continuitate ar fi fost introdusă în filosofie de eleaţi (în speţă, de Parmenide, care spunea că „existenţa este una şi *continuă*"[1]). Aşadar, originar, conceptul de continuitate avea un statut metafizic. De-a lungul timpului, acest concept a cunoscut multiple metamorfoze, atât în aria matematicilor timpurii (geometria lui Euclid), a ştiinţelor naturii (începând cu Galilei[2]), cât şi, treptat, odată cu ridicarea acestuia la statutul de „principiu" (Leibniz), în metodologia matematicii şi, prin aceasta, a ştiinţelor moderne.

Prima dezvoltare oarecum sistematică a ideii de continuitate o cunoaştem cu Aristotel (mai ales în *Fizica*). Aici, „continuitatea" este aproximată presupunând atât un pronunţat sens ontologic, cât şi o tratare în cadrul geometriei euclidiene, contextul fiind, în principal, găsirea unei soluţii privind paradoxele eleate, care, la limită, aveau ca problemă subiacentă aporiile infinitului. Întrucât, cu Leibniz, „continuitatea" cunoaşte o perioadă de „maturizare", fiind direct implicată, pe de o parte, în angrenajul complicat al filosofiei monadice leibniziene şi, pe de alta, mai ales în încercarea de justificare a introducerii calculului infinitezimal, este lesne de înţeles de ce, după contribuţia lui Aristotel, ne vom opri la „principiul continuităţii" al lui Leibniz.

---

[1] V. Brochard, *Études de philosophie ancienne et de philosophie moderne*, Paris, 1926, p. 13, în Al. Surdu, *Cercetări logico-filosofice*, Bucureşti, Editura Tehnică, 2008, p. 429.

[2] Vezi I. Pârvu, *Infinitul*, Bucureşti, Editura Teora, 2000, p. 136.

Ceea ce interesează în mod special este nu atât conceptul de continuitate, în dinamica sa (de) la Aristotel şi (la) Leibniz; ne propunem să observăm importanţa şi semnificaţia acestuia în tratarea problemelor infinitului (la Aristotel şi Leibniz) *din perspectiva* considerării *naturii* acestui concept, implicată în discursurile respective corespunzătoare. Pentru că, făcându-ne o idee despre poziţiile dinspre care este înţeles, aproximat şi despre „locurile” în care îşi găseşte aplicaţiile *continuum*-ul, am putea înţelege mai sistematic anumite aspecte ale *naturii* legăturii acestuia cu *infinitul*.

În chestiunea paradoxelor, eleaţii opuneau „calea adevărului” raţional experienţei senzoriale, în timp ce Platon, separând tărâmul Ideilor de lumea lucrurilor sensibile, le dădea dreptate amândurora. Se pare că cele două variante doar evitau paradoxele prin restricţii: primii eliminau posibilitatea de a apela la sensibilul înşelător, în timp ce Platon insista asupra separaţiilor celor două lumi, a ireductibilităţii celor două[3].

Pentru Aristotel, paradoxele nu sunt altceva decât argumente false sau pseudoargumente (paralogisme)[4]. Investigând în ce constau natura şi mecanismul contradictoriu al generării acestor paradoxe, Aristotel s-a oprit la problema mişcării, aşa cum apare aceasta în celebrele paradoxe ale lui Zenon; şi pentru că „mişcarea face parte dintre lucrurile continue, iar infinitul apare cel dintâi în continuu”[5], problema continuului devine astfel centrală atât pentru rezolvarea paradoxelor, cât şi în vederea încercării de elucidare a problemei infinitului în general.

Soluţia lui Aristotel la paradoxele eleate pune în evidenţă contradicţia dintre caracterul *absolut* al identităţii logice, al logicului redus la identitatea absolută, şi caracterul *relativ* al identităţii concrete, al concretului (un concret pitagoreic). Pitagoreicii şi eleaţii, în general, nu aveau încă noţiunea abstractă de distanţă: pentru a se mişca, un anumit corp trebuia să parcurgă o anumită distanţă. Această distanţă anumită era imaginată ca o anumită linie dreaptă. Dar, pitagoreic vorbind, linia este alcătuită din puncte – punctul fiind *unitatea fără dimensiune*. Oricât de mică ar fi o distanţă, ea conţine o infinitate de puncte. Acesta era concretul pitagoreic[6].

Pe de altă parte, *principiul identităţii abstracte* cere ca totul sa fie identic cu sine. Astfel, *infinitul este infinit* şi, deci, oricât de mică ar fi distanţa, în mod raţional, nu putea fi parcursă, indiferent dacă în realitate este parcursă sau nu. Ea ar putea fi parcursă în mod raţional fie în cazul în care *infinitul este finit*, ceea ce nu se poate admite fără a încălca principiul identităţii, fie în cazul în care distanţa nu este infinită, ceea ce nu se poate admite fără a încălca principiul pitagoreic de mai sus. Deci, dacă sunt admise ambele principii, se ajunge la contradicţie, adică la paradox[7].

[3] Al. Surdu, *op. cit.*, p. 440.
[4] *Ibidem*.
[5] Aristotel, *Fizica*, III, 1, 200b, în I. Pârvu, *op. cit.*, p. 93.
[6] Vezi Al. Surdu, *op. cit.*, p. 441.
[7] *Ibidem.*

După cum se observă, o înţelegere a naturii şi a mecanismului paradoxelor antice necesită o înţelegere a sensului şi a semnificaţiei termenilor centrali utilizaţi de cei vechi în analiza acestor argumente[8].

Identificarea de către Aristotel a acestor „surse” de contradicţie are la bază modalitatea generală (oarecum derutantă) a acestuia de a chestiona problemele filosofice. Cum arată Hintikka[9], Aristotel acorda un mare spaţiu consideraţiilor preliminare în care sunt discutate argumente pro sau contra temei sau conceptului respectiv, consideraţii care, aparent, dau naştere unor concluzii contradictorii; nu trebuie, însă, să rămânem la acest stadiu al analizei, ci trebuie să observăm că aceste cconsideraţii introductive servesc doar la pregătirea soluţiei aristotelice; şi, cel mai adesea, soluţia sa vine ca o rezolvare a contradicţiilor pe calea introducerii unei importante distincţii de ordin conceptual[10].

În cazul nostru, o consecinţă este că, la Aristotel, nici principiul identităţii şi nici principiul pitagoreic nu sunt absolute. Mai mult, Aristotel ne oferă două tipuri de argumente în susţinerea ideii că argumentul eleaţilor nu este valid: unele sunt conforme cu natura lucrurilor şi vizează interpretarea pitagoreică (greşită) a spaţiului şi timpului; altele sunt formulate din punct de vedere logic şi vizează critica absolutizării principiului identităţii[11].

Deşi legată de primul punct (în legătură cu natura lucrurilor), problema continuului, cum vom vedea, este în relaţie *şi* cu aspectele logice. Altfel, reducerea existentului, a onticului la logic şi invers, tratarea sensibil-senzorială a unor probleme ale logicii conţine *în sine* o contradicţie. Pornind de la conceptul de continuu, tocmai aceasta încearcă Aristotel să arate.

Revenind la argumentele aristotelice (conforme naturii lucrurilor) împotriva interpretării pitagoreice a spaţiului şi timpului, Aristotel determină *continuitatea* prin raportare la alte câteva noţiuni pe care le va defini împreună: concomitenţa, separarea, contactul, intermediarul, consecutivul şi contiguul. Astfel, „Concomitenţa, se zice, există, după loc, despre toate lucrurile care sunt într-un singur loc şi separat, despre lucrurile care există într-un alt loc. Se zice că sunt în contact lucrurile ale căror extremităţi sunt împreună, iar intermediarul este lucrul la care ajunge prin natură lucrul care se mişcă mai înainte de a ajunge la extrema la care în mod firesc tinde ceea ce se schimbă continuu. Consecutiv este lucrul care, fiind îndată după început, fie în aşezare, fie în formă, fie în altă privinţă din acestea, nu este separat prin niciun interval de lucru de acelaşi fel cu care este în legătură... Contiguu este lucrul care, fiind consecutiv altuia, este şi în contact.” Având aceste concepte determinate astfel, pe baza lor, „Continuul este un fel de lucru care se ţine mereu, vreau să spun că el există mereu atunci când extremele celor două lucruri care sunt în contact sunt acelaşi lucru şi, aşa cum arată numerele, se ţin împreună.”[12]

---

[8] Pentru o imagine lămuritoare, vezi Al. Surdu, *op. cit.*, p. 417-439.

[9] J. Hintikka, *Time & Necessity. Studies in Aristotle's Theory of Modality* (cap. VI, *Aristotelian Infinity*), în I. Pârvu, *op. cit.*, p. 33-34.

[10] *Ibidem.*

[11] Vezi Al. Surdu, *op. cit.*, p. 441.

[12] Aristotel, *Fizica*, V, 3, 226b – 227a, în I. Pârvu, *op. cit.*, p. 93-94.

Însă, referindu-se la lucruri individuale, nu orice consecutiv este contiguu, de exemplu numerele; ele nu alcătuiesc, în sens aristotelic, un continuu. Dar nu orice contiguu (în contact) este şi consecutiv, căci în contact pot fi lucruri diferite, care nu alcătuiesc un întreg şi a căror ordine poate fi inversată[13].

Cum observă I. Pârvu, se pare că Aristotel accentuează asupra a două trăsături principale ale continuului: „conexibilitatea” părţilor lui, „extremităţile celor două lucruri să fie un singur lucru”[14]; „Continuul este un fel de contiguu sau contact. Se spune *continuitate* când limitele prin care două lucruri care se ating şi se ţin laolaltă se continuă, devin una şi aceeaşi limită”[15] şi „divizibilitatea sa la infinit”: „căci continuul se poate diviza la nesfârşit”[16]; „continuul se divide la infinit”; orice continuu este divizibil în divizibile la infinit.”[17]

În ceea ce priveşte divizibilitatea la infinit a „distanţei” din aporiile eleate, Aristotel încearcă să demonteze acest paradox prin analogia cu timpul; aşadar, urmându-l pe I. Pârvu, „împotriva argumentului dihotomiei, Aristotel deduce (pornind de la definiţia continuului: «numesc continuu lucrul care este divizibil în lucruri divizibile la infinit» *Fizica*, VI, 1, 232 b) necesitatea continuităţii timpului; iar, «dacă timpul este continuu, este continuă şi mişcarea, adică într-adevăr într-o jumătate de timp străbate jumătate de loc şi, în mod absolut, într-o cantitate de timp mai mică străbate mai puţin, pentru că vor fi în aceleaşi diviziuni ale timpului şi ale mărimii. Şi dacă orice lucru din două este infinit, este necesar ca şi celălalt să fie infinit ş.a.m.d. De aceea este falsă afirmaţia lui Zenon care nu admite că infiniturile pot fi străbătute sau atinse, fiecare într-un timp definit (*Fizica*, VI, 2, 233a)”. Pentru lucrurile infinite în *intensiune* (s.n.) se poate concepe că ele pot fi «atinse» într-un timp definit: pentru lucrurile «infinite după diviziune... în acelaşi fel este şi timpul. În acest fel, într-un timp infinit şi nu într-un timp finit se poate parcurge infinitul şi se pot atinge infinitele prin infinite, nu prin finite». Lui Aristotel îi apare astfel că «s-a dezlegat dificultatea prin faptul că timpul cuprinde în sine elemente infinite, pentru că nu este nimic ciudat dacă într-un timp infinit se parcurg lucruri infinite».”[18] Dar, continuă Aristotel, aceasta nu este adevărata soluţie, ci numai una „pentru cel care întreabă”.

I. Pârvu arată în continuare că divizibilitatea simultană a timpului este un gen de „evaziune” necorespunzătoare: adevărul constă în aceea că, „dacă cineva ar despărţi o dreaptă continuă în două jumătăţi, acesta se va folosi de un punct unic ca de două, pentru că el va face din acelaşi punct început şi sfârşit aşa procedează şi cel care numără, şi cel care împarte în jumătăţi. Dar dacă se va împărţi astfel nu va fi continuă nici linia, nici mişcarea, căci mişcarea continuă ţine de continuu, iar în

[13] Vezi Al. Surdu, *op. cit.*, p. 442.
[14] Aristotel, *ibidem*, în I. Pârvu, *op. cit.*, p. 94.
[15] Aristotel, *Metafizica* (XI, 12, 1069), în *ibidem.*
[16] Aristotel, *Fizica*, I, 2, 185b, în *ibidem.*
[17] *Ibidem*.
[18] I. Pârvu, *op. cit.*, p. 94.

continuu există jumătăţi infinite, nu însă în act, ci în potenţialitate”[19]. Admiterea numai ca potenţialitate a infinitului îl face pe Aristotel să conchidă: „în acest fel trebuie să spunem celui care întreabă dacă se admite că se poate străbate infinitul în timp sau în lungime că într-un fel se poate, într-alt fel nu se poate. Dacă există în entelehie, nu se poate, dacă există în potenţialitate, se poate.”[20]

Segmentul de dreaptă poate fi divizat indefinit în părţi numai în potenţă, explică Pârvu, dar nu este efectiv divizat în act; infinitul nu este decât o *posibilitate gândită*, în realitate această diviziune nu se termină niciodată[21], astfel încât nu avem actual un asemenea segment: „Dar acest număr al dihotomiei nu este separat, iar infinitatea nu rămâne în permanenţă, ci devine ca timpul şi numărul timpului” (*Fizica*, III, 7, 207b). Dacă această divizibilitate ar exista în act, atunci nu s-ar putea reproşa nimic lui Zenon: mobilul ar parcurge traiectoria – conform expunerii lui Zenon – dacă „ar concepe mişcarea în gând” (*Fizica*, VIII, 8, 262b). Cel ce se mişcă, spune Aristotel, parcurge infinitul „în chip accidental, nu în chip absolut, căci în chip accindental, pentru linie există infinitate de jumătăţi, pe când esenţa şi natura ei sunt diferite” (*Fizica*, VIII, 8, 263b)[22]. În acest fel, arată Pârvu, Aristotel concepe divizibilitatea infinită a segmentului nu numai ca pe ceva potenţial, dar şi ca pe un accident ce nu ţine de esenţa ei.

Revenind la Alexandru Surdu, cu acesta spunem că din toate acestea rezultă că unitatea şi punctul nu sunt acelaşi lucru; unităţile nu au contact; punctele nu au succesiune şi nici punctele şi nici unităţile nu alcătuiesc un continuu. Prin urmare: *continuul* nu poate fi conceput în mod pitagoreic, căci mobilul (din argumentele eleate) care străbate o distanţă, trebuie să parcurgă un continuu. *Continuu*-ul este alcătuit din părţi, dar mobilul nu străbate părţile, ci *întregul*[23], întrucât părţile sunt divizibile la infinit – însă doar potenţial, nu în realitate!

Într-adevăr, raţionamentul eleat este greşit deoarece concepe străbaterea părţilor, iar nu a întregului. Părţile, însă, sunt infinite, chiar dacă nu sunt puncte, cum credeau pitagoreicii. Părţile continuului nu pot fi puncte, deoarece punctele sunt indivizibile. Însă continuul (o anumită distanţă) nu se produce logic, ci se produce în mod natural şi este alcătuit, deci, din părţi divizibile la infinit sau, altfel spus, dintr-o infinitate de părţi[24] – dar divizibilitatea la infinit este doar în potenţă, nu în existenţă.

Prin aceasta, de fapt, Aristotel se îndepărtează de problema lui Zenon, susţine Pârvu, care era una de natură logică şi privea posibilitatea conceptualizării infinitului şi a mişcării, şi nu una ce viza natura mişcării reale. O altă interpretare (Surdu) ar fi că infinitul poate fi conceput nu numai conform naturii, ci şi conform

[19] Aristotel, *Fizica*, VIII, 8, 263b, în *ibidem*, p. 95.
[20] *Ibidem.*
[21] Vom vedea că și la Leibniz lucrurile sunt asemănătoare în această privinţă.
[22] Vezi I. Pârvu, *op. cit.*, p. 95.
[23] Al. Surdu, *op. cit.*, p. 442.
[24] *Ibidem.*

gândirii; infinitul poate fi conceput *în devenire*[25], în consonanţă cu infinitul *potenţial* aristotelic, am adăuga noi.

Ne interesează, la Aristotel, şi legătura dintre infinit şi continuu în matematică. I. Pârvu ne spune că „...următoarele ar fi problemele de interes matematic pe care Aristotel le examinează: 1. Dacă continuul poate consta din puncte sau poate fi infinit divizibil; 2. Dacă infinitul există, şi în ce sens; 3. Cum poate fi definit infinitul? În *Fizica* (III, 6, 206b) se spune: «infinitul nu este lucrul faţă de care nu există altul mai mare, ci lucrul faţă de care nu există lucru în afară... Infinit este deci lucrul în afara căruia se poate lua o cantitate mereu. Dar lucrul în afara căruia nu există nimic, acesta este finit şi întreg»; 4. Există oare diferenţe de mărime (de grad) în infinit, sau infinitul este simplu şi egal cu el însuşi?”[26]

Ilie Pârvu semnalează faptul că în ultima problemă se strecoară o intenţie profundă: este vorba despre problema transfinitului lui Cantor şi teza după care o mărime poate deveni infinit mică doar potenţial, nu actual („cu mărimile, lucrurile stau altfel, pentru că conţinutul se divide la infinit, dar creşterea nu există la infinit”; *Fizica*, III, 7, 207b): această intuiţie (Pârvu), formulată „ideaţional” în contextul unei filosofii a naturii, poate fi „tradusă” în multe feluri în limbajul operaţional actual al matematicii; exemplu: „deşi orice număr real poate fi reprezentat prin expansiune decimală fără sfârşit, nu e în general posibil să se găsească o formulă actuală pentru întreaga expansiune infinită; potenţial însă, pentru orice număr real dat dinainte, datorită cunoaşterii lui se poate obţine orice parte finită dorită a expansiunii lui decimale”[27]

După cum se vede, la Aristotel, în funcţie de cum este conceput continuul avem o înţelegere anumită a infinitului însuşi; şi invers. Putem spune că continuuul este implicat în rezolvarea paradoxelor (care implică problema infinitului) şi, de asemenea, şi în concepţia lui Aristotel privind infinitul (cel puţin). La fel, cum vom vedea, prezenţa continuului în termeni de continuitate-discontinuitate în analiza nonstandard, respectiv în SIA (Smooth Infinitesimal Analysis) privind infinitezimalii este legată de aproximarea infinitului. În plus, ceea ce interesează este determinarea fie a naturii acestui *continuum* (în contextul amintit), fie clarificarea modalităţii de concepere a acestuia – cu tot ce poate decurge de aici – fie ambele combinate (şi cum). Dar aceasta este, totuşi, o sarcină care depăşeşte cadrul discuţiei de faţă.

Legat de argumentele logice, Aristotel ajunge la concluzia că, în asumarea infinitului potenţial având la bază continuul, în ceea ce priveşte existenţa, principiul terţului exclus nu mai are validitate absolută; la fel se întâmplă şi cu principiul noncontradicţiei; aceasta nu înseamnă că nu mai au valabilitate ca legi ale gândirii, ci doar că validitatea nu mai este absolută: adică nu se aplică la modul absolut. Aceste argumente privesc distingerea dintre domeniul gândirii abstracte şi

[25] *Ibidem*, p. 444.
[26] I. Pârvu, *op. cit.*, p. 96.
[27] S. Bochner, *Infinity*, în I. Pârvu, *op. cit.*, p. 97.

cel al concretului (pytagoreic) prin apel la ideea continuului în contextul provocării paradoxelor eleate. Urmărind desfăşurarea acestora aşa cum este expusă de Al. Surdu în lucrarea la care ne-am mai referit[28], interesează mai ales *consecinţele* cu caracter logic în urma acestor argumente.

Teza aristotelică ar fi aceea că *principiul identităţii are un caracter relativ.* Aserţiunea este formulată în contextul considerării infinitului drept continuul (spaţial şi temporal) alcătuit dintr-o infinitate de părţi. Astfel, vorbind despre infinit, acesta nu poate să existe ca atare, independent, în sine şi pentru sine. El are nevoie de un suport real. Substratul său este continuul şi lucrul sensibil. Din această cauză, infinitul, într-un fel există, în alt fel nu[29] – adică dacă este în realitate, nu, dacă este în potenţă, da.

După cum observăm şi vom vedea în continuare, aceeaşi distincţie (infinit potenţial – infinit actual) transpare şi la nivelul logic; în plus, aici, aceasta aduce noutatea legată de limitarea validităţii principiilor logice fundamentale: principiul terţului exclus şi principiul noncontradicţiei.

Fiind legată de lucrul individual, *infinitatea este supusă* şi ea *devenirii*. Infinitul nu trebuie considerat ca ceva dat, ci trebuie conceput în devenire. *El poate fi comparat cu lupta;* infinitul *se produce şi se distruge veşnic*; *este veşnic altul*.

Alexandru Surdu subliniază faptul că determinaţiile infinitului lui Aristotel nu au nimic comun cu identitatea abstractă. Determinaţiile infinitului nu sunt conforme gândirii abstracte, ci unei gândiri concrete, unei gândiri conforme obiectului concret. Cineva nu este în afara cetăţii pentru că îl gândim aşa, ci fiindcă există realmente; tot aşa şi infinitul. El are atributele lui naturale şi nu pe cele ale gândirii. Nu infinitul trebuie să fie conform gândirii, ci gândirea trebuie să fie conformă lui. O consecinţă firească a celor spuse este, în primul rând, *respingerea infinitului actual*[30].

Iar noi putem relua ce am spus mai sus, că ideea de continuu este în strânsă legătură cu paradoxele eleate şi, deci, cu modalităţile în care este considerat infinitul; dezvăluind mecanismul formării paradoxele eleate – prin critica acestora cu ajutorul ideii de continuu – Aristotel ajunge la chiar teoria sa asupra infinitului propriu-zis: admiterea doar a infinitului potenţial.

Căci infinitul nu poate fi în act, ci numai *în potenţă*, fie că este vorba despre infinitul în intensiune (diviziune infinită – infinitul mic), fie că este vorba despre infinitul în extensiune (infinitul mare). Aceasta, deoarece *realmente* nu este posibilă nici diviziunea infinită, nici prelungirea infinită. Acestea sunt posibile doar în gândire. Dar ar fi absurd să ne încredem doar în gândire. Într-adevăr, încrederea absolută în gândire ar duce la reeditarea paradoxelor[31].

În al doilea rând, urmează corectarea gândirii în conformitate cu obiectul gândit. Exemplele pe care le dă Aristotel dovedesc faptul că el a conceput această

[28] Al. Surdu, *op. cit.*, p. 442-445.
[29] *Ibidem*, p. 442.
[30] *Ibidem*, p. 443.
[31] *Ibidem*.

corectare *în genere*, deci nu numai referitor la problema infinitului, ci a orcărui lucru care devine[32].

Iată, acum, exemplul a cărui desfăşurare logică o vom relua şi noi. Al. Surdu arată că, în cadrul devenirii, pe care Aristotel o numeşte *schimbare în contrar*, lucrurile trec în contrariul lor.

„Dacă, de exemplu, ceva se schimbă din non-alb în alb şi nu este în nici una (dintre cele două stări), atunci nu va fi nici alb, nici non-alb”[33].

În continuare, autorul arată că această situaţie contrazice caracterul *absolut* al legii contradicţiei şi al legii terţului exclus. Într-adevăr, dacă despre un lucru nu este adevărată nici afirmaţia nici negaţia, atunci înseamnă că ele nu se mai contrazic[34].

Dacă notăm cu p = „x este alb” şi cu $\sim p$ = „x nu este alb”, atunci faptul că ambele sunt false în acelaşi timp ia forma

$$(1) \qquad \sim p \wedge \sim\sim p$$

care este echivalentă cu

$$(2) \qquad \sim p \wedge p$$

Legea contradicţiei (nu este posibil ca despre un lucru să fie adevărată în acelaşi timp afirmaţia şi negaţia sa**)** are forma:

$$\sim (p \wedge \sim p)$$

Dar, din moment ce (1) $\sim p \wedge \sim\sim p$ este echivalent cu (2) $\sim p \wedge p$, respectiv

(3) $\sim p \wedge \sim\sim p = \sim p \wedge p$, înseamnă că atât (1) cât şi (2) încalcă legea contradicţiei[35].

La fel se încalcă, arată în continuare Al. Surdu, şi legea terţului exclus. Dacă sunt false în acelaşi timp p şi $\sim p$, este evident că nu se poate ca una sau alta să fie adevărată, respectiv $p \vee \sim p$. Având în vedere echivalenţa:

(4) $\sim p \wedge \sim\sim p = \sim p \wedge p$, transformăm al doilea membru, respectiv (2) $\sim p \wedge p$, în disjuncţie şi avem:

$$(5) \sim p \wedge p = \sim(\sim\sim p \vee \sim p)$$

Din membrul 2 al (5), prin transformare, se obţine:

$\sim(\sim\sim p \vee \sim p) = \sim(p \vee \sim p)$, ceea ce înseamnă că din presupoziţia admisă

(1) $\sim p \wedge \sim\sim p$ urmează încălcarea legii terţului exclus $\sim (p \wedge \sim p)$

[32] *Ibidem*.
[33] Aristotel, *Fizica*, Γ, 8, 208a, 14-15, în Al. Surdu, *op. cit*.
[34] *Ibidem*.
[35] *Ibidem*, p. 444.

Dar, continuă Al. Surdu, aceasta nu înseamnă însă negarea absolută a valabilităţii legilor gândirii, ci doar negarea valabilităţii lor absolute[36]. Reluând exemplul propriu-zis, Aristotel mai spune că, pentru faptul că ceva nu este întru totul alb sau non-alb, nu înseamnă că nu se poate afirma despre el că este alb sau non-alb, căci spunem că este alb sau non-alb nu pentru faptul că ar fi întru totul astfel, ci în cele mai multe sau cele mai importante părţi[37].

Într-adevăr, lucrul în discuţie trebuie să se găsească necesarmente într-una dintre stările contrare, dar nu se va găsi niciodată întru totul în acea stare. Dacă ar fi posibilă acea stare ideală, atunci ar însemna reeditarea aporiei lui Antistene, după care nu s-ar mai putea enunţa decât propoziţii de forma „*A* este *A*", arată Al. Surdu.

O consecinţă importantă este aceea că, din moment ce principiul identităţii nu mai are o valoare absolută, înseamnă că infinitul poate fi conceput şi conform gândirii, nu numai conform naturii. Şi, identitatea fiind relativă, infinitul poate fi conceput *în devenire*; poate fi comparat cu *lupta*; poate fi conceput ca ceva *care se produce şi se distruge* veşnic, care *este veşnic altul*[38].

În concluzie, Al. Surdu susţine că, „în acest fel, Aristotel reuşeşte să distrugă chiar mecanismul paradoxelor eleate. Din moment ce continuul spaţio-temporal este cercetat aşa cum se produce în mod natural, iar pe de altă parte, este conceput logic în devenire, ca unitate a contrariilor, deci *în mod dialectic*, nu mai poate să apară nicio contradicţie între ceea ce există şi ceea ce se gândeşte."[39]

Cum spuneam şi mai sus, se pare că soluţia aristotelică îşi are „sursa" – prin modalitatea în care este analizat şi aproximat *continuum*-ului de Aristotel – în conceperea infinitului în cele două ipostaze: ca potenţial şi actual. Validarea primei ipostaze a acestuia este, deci, coerentă atât cu perspectivele implicate asupra continuului, cât şi cu rezultatul examenului logic al argumentelor de acest tip, aşa cum am văzut. În alte cuvinte, avem a face cu relevarea legăturii dintre modalităţile de concepere a infinitului, consecinţele în urma tratării logice (aristotelice) a problemei paradoxelor eleate – relativizarea principiilor identităţii şi terţului exclus – şi o anumită înţelegere a continuului, acestea având ca una dintre consecinţe distingerea dintre ontic şi logic.

Paradoxele eleate sunt paralogisme, sunt argumente greşite, căci contradicţia are loc între două falsuri: între principiile false ale pitagoreicilor (=matematism) şi principiile false ale eleaţiilor (=logicism)[40].

În continuare vom examina în special *această* legătură, aşa cum apare în dezvoltarea „principiului continuităţii" la Leibniz.

Ceea ce trebuie spus din capul locului este că perspectiva centrală, din care este cel mai favorabil (coerent şi consistent) de reconstruit sistemul gândirii lui

[36] *Ibidem*.
[37] *Ibidem*.
[38] *Ibidem*.
[39] *Ibidem*.
[40] *Ibidem*, p. 445.

Leibniz, este cea a metafizicii[41]. Desigur, aceasta nu înseamnă că reconstrucţiile logiciste, matematiste sau metodologice nu îşi pot asigura validitatea corespunzătoare; însă, atunci când avem a face cu pretenţiile că ceea ce se susţine *este* lebnizian sau i-ar putea aparţine lui Leibniz însuşi, asumând că sistemul acestui autor nu este contradictoriu sau inconsistent, trebuie ţinut cont de perspectiva metafizică.

S-a spus că, din acest punct de vedere, în ceea ce priveşte explicaţia naturii, Leibniz s-ar situa mai degrabă pe linia ce va conduce mai târziu la Kant, în care fizica, deşi nu se mai constituie ca o prelungire deductivă a unei metafizici, are încă nevoie de o „ratificare” sau o „legitimare” a principiilor sau legilor sale, deci de o întregire epistemologică şi o întemeiere metafizică[42].

Cu această scurtă observaţie, revenim la chestiunea formulată privind legătura dintre modalităţile de concepere a infinitului, consecinţele în urma tratării logice (aristotelice) a problemei paradoxelor eleate şi felul în care este înţeles continuul: este de văzut dacă se poate desprinde o formulă constantă privind cele de mai sus în funcţie de perspectivele (ponderate) ale celor doi autori (Aristotel şi Leibniz) asupra celor avute în vedere.

Pe lângă tratarea directă, explicită (la Leibniz) a principiului continuităţii, mai putem distinge o „participare” discretă a acestui principiu la diferitele niveluri („trepte”) ale existenţei, prin relaţia cu infinitul corespunzător nivelului în discuţie. Putem găsi, deci, şi o determinare a continuului în funcţie atât de „treapta” existenţei avută în vedere la un anumit moment, cât şi de „tipul” de infinit implicat la nivelul respectiv; urmează să ne întrebăm dacă este posibilă o determinare reciprocă a continuului în relaţia cu infinitul.

Iată acum principalele „trepte” ale existenţei în viziunea lui Leibniz, aşa cum sunt enumerate de I. Pârvu: (1) *fiinţa divină*; (2) „*substanţa individuală*” („lumea metafizic-reală”, „fiinţa completă, unitară”, „unitatea substanţială”); (3) *materia* („substanţa corporală”, „lumea fenomenelor”, „fiinţa prin agregare”); (4) *sufletul*; (5) „*entităţile ideale şi de relaţie*” (spaţiul, timpul, mişcarea, abstracţiile şi conceptele matematice)[43].

Întrucât aceste niveluri se întrepătrund şi sunt, ca atare, de luat în considerare mai degrabă împreună (sistematic) decât individual, discuţia privind implicarea continuului prin tipul de infinit determinabil la nivelul treptelor presupune abandonarea unei ordini anume (de la treapta 1 spre 5 sau invers).

În ceea ce priveşte prima treaptă, constatăm că infinitatea adevărată aparţine doar „substanţei infinite”, Absolutului. Acesta „este anterior oricărei compoziţii şi nu este alcătuit prin adiţia părţilor”; prin urmare, aici, continuul pare să subziste, fiind prezent mai degrabă *implicit.*

Cu excepţia treptei a 4-a (*sufletul*), adevărurile despre infinit cu privire la celelalte trepte ţin de categoria adevărurilor necesare, iar temeiul acestora din urmă

[41] Vezi I. Pârvu, *op. cit.*, p. 52.
[42] *Ibidem*.
[43] *Ibidem*, p. 50.

este asigurat de principiul continuităţii. În elaborarea acestui argument, Leibniz face referire la ideea spaţiului infinit prin apelul la exemplul liniei drepte: ideea spaţiului infinit „... este produsă prin aceea că vedem că acelaşi temei subzistă mereu. Să luăm o linie dreaptă şi s-o prelungim astfel încât să devină dublă decât la început. Este clar că a doua linie, fiind perfect asemănătoare cu prima, poate fi la rândul ei dublată, pentru a produce o a treia, care va fi şi ea asemănătoare cu primele; şi acelaşi temei rămânând permanent, nu este niciodată posibil să se oprească procesul; linia poate fi prelungită la infinit, astfel încât ideea infinitului provine din gândul asemănării sau al identităţii temeiului, iar originea sa este aceeaşi cu a adevărurilor universale şi necesare”[44].

Fiind vorba despre „entităţile ideale” (nivelul 5), ideea de spaţiu nu poate, deci, trimite la un spaţiu absolut şi actual. Reluăm observaţia lui I. Pârvu, că Leibniz nu admite aici decât o infinitate potenţială, una „sincategorematică”: „se înşeală atunci când cineva vrea să-şi imagineze un spaţiu absolut care ar fi un tot infinit compus din părţi; nu există nimic de acest gen, el este o noţiune self-contradictorie, şi toţi aceşti infiniţi, precum şi opuşii lor infinit mici, nu sunt utilizaţi decât în calculul geometrilor, la fel cum sunt rădăcinile imaginare ale algebrei”[45]. La acest nivel, deci, corelaţia infinit-continuu vizează determinarea unui infinit doar potenţial, decisiv fiind aici caracterul „ideal” şi „natura” entităţilor implicate.

Vorbind despre *substanţa individuală* (nivelul 2) – „fiinţa deplină”, „indivizibilă şi indestructibilă în mod natural” – nici aceasta nu presupune, cel puţin *direct*, infinitatea în sensul divizibilităţii actuale. Lucrurile par să stea diferit în ceea ce priveşte corpurile materiale, care au o realitate derivată, doar fenomenală[46].

Se pare că la treapta a 3-a a existenţei (nivelul materiei) principiul continuităţii participă la fiecare dintre aceste substanţe; tot aici avem şi divizibilitatea infinită a materiei, care are la bază această lege: „continuul nu este numai divizibil la infinit, dar orice parte a materiei este actual divizată în alte părţi (...)”[47].

Ceea ce este important pentru noi este faptul că *principiul continuităţii*, aşa cum apare la Leibniz, aduce în primul rând dovada unui „infinit sincategorematic”, adică a înţelegerii lui ca ceva *ideal*, care permite extinderea regulilor operării asupra mărimilor infinite, prin aceea că „regulile finitului îşi menţin valabilitatea în infinit”[48]. Oarecum analog cu poziţia lui Aristotel, infinitul sincategorematic presupune o valenţă exclusiv „operaţională”, neangajând ontologic teoria faţă de existenţa unor „infiniţi mici metafizici”, de care în realitate nu avem nevoie, întrucât „împărţirea materiei nu ajunge niciodată la astfel de particule infinit de mici”[49].

---

[44] G.W. Leibniz, *Nouveaux essays sur l'entendement human*, cap. XVII, § 3, în I. Pârvu, *op. cit.*, p. 51.

[45] *Ibidem*.

[46] Vezi I. Pârvu, *op. cit.*, p. 51.

[47] *Ibidem*, p. 53.

[48] *Ibidem*.

[49] G.W. Leibniz, *Scrisoare către Varignon*, 2 noiembrie 1701, în I. Pârvu, *op. cit.*, p. 55.

Suntem de acord cu I. Pârvu că, prin acest recurs la principiul continuităţii, Leibniz dă o nouă perspectivă discuţiei asupra relaţiei dintre infinitul potenţial şi cel actual. Aplicarea la existenţă a principiului care ne permite să tratăm infinitul după metoda „elementelor ideale” (cum ar fi numerele imaginare) oferă o soluţie problemei tipului de existenţă şi a genului de infinitate proprii materiei[50].

Vorbind acum despre comunicarea dintre nivelurile (2) şi (3), materia, ca realitate doar fenomenală, derivată din cea a „substanţei individuale”, ar presupune un gen de „fiinţare prin extindere”. În acest fel, ea o prelungeşte pe prima şi, prin aceasta, „participă” la realitate, cu amendamentul că aceasta [realitatea] nu-i poate fi atribuită materiei „concepută prin sine”: „materia este reală numai în măsura în care se află, în substanţele simple, o raţiune a ceea ce se constată ca pasiv, în fenomene”[51]. (Leibniz).

Deşi infinitul materiei pare a fi recunoscut ca actual, prin genul de existenţă la care se referă capătă doar o „realitate secundă”, derivată; în plus, susţine I. Pârvu, insistenţa cu care Leibniz neagă existenţa a ceva infinit, atunci când este luat ca „un întreg real”, asigură asumarea infinitului materiei doar ca sincategorematic[52]. Cu alte cuvinte, infinitul nu are decât realitatea lucrurilor ce pot fi divizate, a „fenomenelor incomplete”, lipsite de unitate organică; „lucrul care poate fi divizat în mai multe altele (existând deja în mod actual), este o agregare de mai multe lucruri; iar lucrul care este o agregare de mai multe lucruri nu este unu decât în mintea noastră şi nu are altă realitate decât cea împrumutată de la lucrurile din care e constituit.”

Mai apare necesitatea unui principiu *activ*, care să explice unitatea şi infinitatea cantitativă a corpurilor şi diversitatea lor calitativă prin depăşirea mecanicismului în privinţa înţelegerii unităţii şi a infinităţii lumii (ce avea la bază ideea omogenităţii realului şi a universalităţii unor legi) – acesta este monada[53].

În ceea ce priveşte obiectele matematice (nivelul 5), acestea sunt considerate de Leibniz ca „mărimi ideale”. Acestor entităţi nu li se poate atribui infinitatea în sensul diviziunii: „în extensiunea matematică sunt concepute obiecte *posibile*, nu există nici o diviziune actuală, nici părţi – şi nici elemente prime...” În această categorie a entităţilor *ideale* Leibniz include numerele, spaţiul, timpul, mişcarea, figura, calităţile sensibile etc. Vedem că spaţiul şi timpul sunt ceva ideal, sunt posibilităţi, adică în ordinea coexistenţilor întrucât sunt posibili. Aşadar, în el [spaţiu, n.n.] nu există diviziuni, decât cele determinate de spiritul nostru, iar partea este ulterioară totului[54].

După cum se observă, continuul este considerat de Leibniz printre „entităţile ideale”. Spre deosebire de acesta, materia „nu este ceva continuu, ci discret, ceva divizat în mod actual la infinit”[55]. În schimb, regăsim continuul printre „entităţile

[50] I. Pârvu, *op. cit.*, p. 54.
[51] G.W. Leibniz, în *ibidem*.
[52] I. Pârvu, *op. cit.*
[53] *Ibidem.*
[54] G.W. Leibniz, în *ibidem*, p. 58.
[55] *Ibidem.*

ideale”, ceea ce ne oferă cel puţin un indiciu cu privire la considerarea infinitului materiei – cu care este în legătură acest continuu nu în mod direct – ca sincategorematic. Cum vom vedea, această înţelegere a continuului în opoziţie cu discretul (discontinuul) se va regăsi, în general, atât în analiza nonstandard, cât şi în SIA (Smooth Infinitesimal Analysis).

Vorbind despre relaţia dintre actual şi continuu, Leibniz afirmă: „Se vede... că în ce este actual nu există [continuul, n.n.], decât cantitate discretă, adică o multiplicitate de monade sau de substanţe simple, care, în fiece agregat sensibil, adică în ceea ce corespunde fenomenelor, este mai mare decât orice număr. Cantitatea continuă însă este ceva ideal care priveşte *posibilul* şi actualul, *întrucât este considerat ca posibil* [s.n.]. Continuul, în adevăr, implică părţi nedeterminate, pe când în tot ce este actual nimic nu este nedefinit – căci în el [în actual, n.n.] orice diviziune care se poate face este deja făcută. Actualul este alcătuit, aşa cum este alcătuit numărul de unităţi din fracţiuni: părţile sunt în act cu totul real, dar nu tot astfel în totul ideal. Noi însă, confundând ceea ce este ideal cu substanţele reale, ne precipităm singuri în labirintul continuului şi în contradicţii care nu pot fi explicate, căutând părţi actuale în ordinea posibililor şi părţi nedeterminate în agregatul de părţi actuale”[56].

Din cele de mai sus ar reieşi că, pentru a evita contradicţiile greu de explicat, singura considerare a continuului (care este printre cele „ideale”) în legătură cu realul/actualul este printr-o înţelegere sincategorematică a infinitului materiei. Această idee – destul de obscur determinabilă la Leibniz – trimite la „nucleul” problematic descris de confluneţa infinitului potenţial cu cel actual, a continuului cu discretul (discontinuul), în planurile „treptelor” existenţei leibniziene. Fără îndoială, „continuul” este conceptul cheie aici, aserţiunile în legătură cu acesta asumând, inevitabil, atât infinitul (ca *potenţial-actual*), cât şi caracterul ambiguu de *ideal-real* al continuului. Cum remarca şi I. Pârvu, la Leibniz întâlnim dificultatea de a asuma calitatea de infinit actual pentru nivelul materiei (3), dar şi, spunem noi, modul anevoios de înţelegere a *infinitului* materiei ca ideal în real; şi, din acest punct de vedere, avem o asemănare cu perspectiva aristotelică.

Ceea ce creează structural dificultăţile menţionate, credem, este însăşi problema generată de planurile în care se desfăşoară discuţia; cu restricţia de a asuma planul metafizic al celor vechi dar în termenii acestora, este vorba despre „problema participării”. Acest plan al metafizicii este înlocuit de cel al obiectelor matematice, al „entităţilor ideale” în general, deşi, cum am văzut, Leibniz recunoaşte infinitatea adevărată ca aparţinând primului nivel (al fiinţei divine). Totuşi, planul acesteia, ca şi cel al monadelor şi al substanţei individuale, nu este unul transcendent.

Ca rezultat al abstractizării, obiectele matematice nu există în real „în nuditatea lor”; de aceea, lor nu li se poate aplica divizibilitatea infinită actuală, ci doar posibilă, după felurile în care consideră cugetarea noastră[57]. Deşi pare că am

[56] *Ibidem*.
[57] Vezi I. Pârvu, *op. cit.*, p. 58-59.

avea şi o infinitate actuală, aceasta nu este propriu-zis actuală, şi nici nu poate fi; divizibilitatea infinită actuală este, de fapt, una *potenţial*-actuală.

Cum observa şi I. Pârvu, deşi Leibniz utilizează conceptul de infinit actual *în raport cu materia*, acest lucru pare mai degrabă un indiciu al modului în care Leibniz îşi reprezintă „participarea” materiei la realitate. Astfel, „..afirmaţiile lui Leibniz despre infinitul actual, (...) nu pot fi considerate dovezi suficiente pentru a-l considera pe Leibniz (aşa cum a încercat Cantor) adept deplin al ideii infinitului actual”[58].

O „probă” în sensul celor spuse mai sus vine (şi) de la maniera în care Leibniz consideră utilizarea infinitului în matematică: acesta poartă semnificaţia de „concept ideal”, util şi, poate, chiar indispensabil pentru a „exprima în mod analitic mărimi reale”. Într-adevăr, infinitului din matematică, deşi are un fundament *in re*, oferit de principiul continuităţii, nu trebuie să i se acorde în mod nemijlocit realitate, ci doar valoarea de „prescurtare a calculului”[59].

În consonanţă cu ceea ce spuneam şi noi mai sus, Pârvu consideră că, „...în înţelegerea relaţiei dintre infinitatea actuală şi potenţială, Leibniz aplică principiul continuităţii – scos din generalizarea unor practici matematice –, ajungând la un punct de vedere care adaptează finitismul aristotelic metodologiei matematice, anticipând linii esenţiale ale formulării hilbertiene a problemei infinitului şi existenţei matematice”[60].

După Lakatos, finitismul matematic al lui Leibniz, ca şi al lui Kant ori Hilbert (acordând realitate sau existenţă veritabilă doar fiinţelor finite), derivă atât din dificultăţile matematicienilor în operarea lor cu infinitezimalii, cât şi din preeminenţa unui realism ontologic şi a unei metafizici a matematicii – proprii unei anumite etape din dezvoltarea cunoaşterii matematicii[61].

În ceea ce priveşte principiul continuităţii, Leibniz ar fi reuşit depăşirea ştiinţei algebrice a finitului prin încercarea de a elabora, prin intermediul unei *mathesis universalis*, o ştiinţă matematică a infinitului, apelând – pentru corelarea infinitului cu finitul – la acelaşi principiu al continuităţii (Pârvu).

O scurtă concluzie ar fi aceea că adevărurile despre infinit sunt fundate în *principiul continuităţii*; principiul continuităţii este conectat la infinitul din diferitele trepte (mai puţin a absolutului) şi furnizează diferitele accepţiuni ale infinitului „local”.

După considerarea principiului continuităţii în relaţia cu infinitul la nivelurile existenţei (cele 5), urmându-l în continuare pe I. Pârvu, trecem la desfăşurarea legăturii dintre acest principiu şi infinitezimalii leibnizieni în contextul „calculului”.

Leibniz utilizează „legea continuităţii” ca pe o nouă încercare de justificare a introducerii calculului infinitezimal, după controversele generate de fundamentarea

[58] *Ibidem*, p. 59.
[59] *Ibidem*.
[60] *Ibidem*.
[61] I. Lakatos, *Philosophical Papers*, vol. 2, în I. Pârvu, *op. cit.*, p. 60.

şi de explicaţiile sale din *Acta eruditorum* (Leipzig, 1684), privind utilitatea noului calcul şi avantajele faţă de metodele precedente. Astfel, în lucrarea de mai târziu (1704), prin justificarea calculului infinitezimal prin calculul algebric, alături de subliniera asemănării cu calculul algebric obişnuit, Leibniz susţine că „legea continuităţii" ar justifica, prin analogie cu mărimile geometrice continue, introducerea mărimilor infinitezimale[62].

În ceea ce priveşte calculul diferenţial, acesta nu este decât o „metodă de aproximare", spune Pârvu, un „expedient destinat prescurtării calculului", asemănător „metodei exhaustiei" a anticilor, având un sens preponderent euristic. În acest sens, Leibniz ar înţelege prin infinit doar „incomparabilul", adică un concept relativ, a cărui semnificaţie depinde de context şi de natura problemei; prin urmare, infinitezimalii devin „mărimile incomparabil de mici" care „trebuie să fie atât de mici cât trebuie pentru ca eroarea să fie mai mică decât eroarea dată, astfel încât [această metodă, n.n.] nu diferă de stilul lui Arhimede decât în expresiile care sunt mai directe în metoda noastră şi mai conforme artei invenţiei"[63].

Cantităţile infinitezimale „nu sunt câtuşi de puţin constante şi determinate". În consecinţă, nu putem susţine că „există în natură linii care sunt, în raport cu cele obişnuite ale noastre, riguros infinit de mici... Aşadar, liniile infinite şi infinit de mici – chiar dacă nu le admitem cu rigurozitatea metafizică şi ca lucruri reale – ne putem totuşi servi de ele, fără îndoială, ca de noţiunile ideale prin care se prescurtează raţionamentul, la fel cu aşa-zisele rădăcini imaginare din analiza obişnuită, cum este, de exemplu, $\sqrt{}^2$. Chiar dacă acestea pot fi denumite şi imaginare, ele sunt totuşi utile şi uneori chiar indispensabile, pentru că exprimă în mod analitic mărimi reale."[64]

Un aspect relativ controversat adus în discuţie de I. Pârvu privind infinitezimalii este legat de statutul acestora: pe de o parte, ca având o justificare operaţională doar, sau, cum nu încetează să afirme Leibniz, beneficiind de temeiuri în realitate. Astfel, infinitezimalii nu trebuie să fie reduşi la simple ficţiuni; prin urmare, este necesară argumentarea întemeierii lor în realitate. Este, deci, necesară o „interpretare metafizică", prin care să înţelegem natura ultimă a acestor „ficţiuni bine fundate", o explicaţie autentică fiind oferită, după Leibniz, doar de o „demonstraţie posedând certitudine metafizică"[65].

Încă o dată, importanţa principiului continuităţii, sublinitată de I. Pârvu, este prezentă şi în cazul infinitezimalilor, prin furnizarea temeiurilor în realitate ale acestora. În acest sens, principiul continuităţii apare ca unul dintre principiile matematicii infinitezimale.

În scrisoarea către Varignon, Leibniz avea în vedere să prezinte o justificare pe baza căreia să se poată susţine că „infinitul şi infinitul mic sunt atât de puternic

---

[62] Vezi I. Pârvu, *op. cit.*, p. 101.

[63] *Ibidem*, p. 101 şi nota 30.

[64] G.W. Leibniz, *Scrisoare către Varignon*, 2 noiembrie 1701, în I. Pârvu, *op. cit.*, p. 102 şi nota 31.

[65] G.W. Leibniz, *Despre modul de a distinge fenomenele reale de cele imaginare*, în *Opere filosofice*, vol. 1, p. 498, în I. Pârvu, *op. cit.*, p. 102.

fundamentate încât toate rezultatele din geometrie, ba chiar toate rezultatele din natură se comportă ca şi cum ambele ar fi realităţi perfecte”[66].

Leibniz recunoştea principiului continuităţii, în fizică, posibilitatea descoperirii unor adevăruri. Totuşi, cum observă şi I. Pârvu, generalitatea principiului continuităţii apare ca o idee metafizică: „... totul e legat în Univers, în virtutea temeiurilor de ordin metafizic, aşa încât totdeauna prezentul conţine în sânul său viitorul, şi nicio stare dată nu se poate explica în chip natural decât prin starea care o precede imediat. Dacă se neagă aceasta, atunci lumea va avea hiaturi, ceea ce răstoarnă principiul mare al raţiunii suficiente...”[67]. Reţinem această formulare pentru discuţia din finalul textului nostru.

O formulare (definiţie) a legii continuităţii a lui Leibniz regăsim şi în cartea lui I. Pârvu: „repausul poate fi privit ca o mişcare infinit de mică, adică echivalentă cu un subgen al opusului său, suprapunerea a două puncte ca o distanţă infinit de mică între ele, egalitatea ca un caz limită a inegalităţii etc.”[68] Iar legătura continuului cu legile comunicării mişcării este redată de accepţiunea sintagmei „requisitum necesar” („condiţia logic anterioară de care depinde producerea unui efect”). Astfel, continuitatea este un caracter distinctiv al adevăratelor legi ale comunicării mişcării; nu putem pune la îndoială că toate fenomenele îi sunt supuse; ele nu sunt explicate în mod inteligibil decât prin mijlocirea adevăratelor legi ale comunicării mişcării[69].

Principiul continuităţii permite introducerea şi utilizarea infinitului mic în matematică, întrucât el garantează faptul că „regulile finitului îşi menţin valabilitatea în infinit, ca şi cum ar exista atomi – adică elemente ale naturii de mărime fixă dată –, deşi nu acesta este cazul din cauza împărţirii reale, neîngrădite a materiei, şi invers, regulile infinitului sunt valabile pentru finit, ca şi cum ar exista infiniţi mici metafizici, deşi în realitate nu avem nevoie de ei şi împărţirea materiei nu ajunge niciodată la astfel de particule infinit de mici.”[70]

Cum am mai arătat, oarecum ambiguu, infinitezimalii, deşi consideraţi mai ales „ficţiuni”, au un *fundamentum in re*, şi tocmai invocarea acestuia ar explica utilitatea lor.

În aceeaşi ordine de idei, reluăm un pasaj dintr-o corespondenţă a lui Leibniz cu L'Hospital: „Perfecţionarea analizei transcendentelor sau a geometriei unde intră considerarea unui infinit anumit va fi fără îndoială cea mai importantă din cauza aplicării pe care am putea-o face la operaţiile naturii, care face să pătrundă infinitul în toată opera ei.”[71] Astfel, prezenţa unei legi a continuităţii în natură permite introducerea unor mărimi geometrice continue, care pot lua valori oricât de

[66] G.W. Leibniz, *Scrisoare către Varignon*, în *ibidem*, p. 102.
[67] Vezi I. Pârvu, *op. cit.*, p. 102-103.
[68] *Ibidem*.
[69] *Ibidem*.
[70] G.W. Leibniz, *Scrisoare către Varignon*, în I. Pârvu, *op. cit.*, p. 103.
[71] *Leibniz an L'Hospital*, 1693, în I. Pârvu, *op. cit.*

mici – putând, deci, să devină mai mici decât orice mărime dată. Leibniz: „fără îndoială, în aceasta constă demonstraţia riguroasă a calculului infinitezimal.[72]"

În esenţă (cu I. Pârvu), susţinem că principiul continuităţii constituie acel *fundamentul in re* al acestor *ficţiuni* care sunt infinitezimalii sau numerele imaginare – un corespondent interesant al celor de mai sus, cum vom vedea, este de reliefat în SIA.

Dincolo de specificul unui text filosofic cu un accent istoric, demersul nostru intenţionează, totuşi, să lege cele discutate mai sus (cu privire la „continuum" la Aristotel şi Leibniz) de unele desfăşurări mai recente ale temei şi în contexte cumva exterioare discursului filosofic propriu-zis; considerăm, deci, posibilă o tratare oarecum sistematică a relaţiei continuului cu calculul infinitezimal – mai exact în analiza nonstandard (Robinson) şi în SIA – şi, de aici, cu unele consecinţe asupra posibilelor modalităţi de înţelegere a infinitului.

Aşa cum remarcă şi I. Pârvu, conceptul de infinitezimal a fost introdus de Leibniz ca un element al unui întreg sistem filosofic şi ştiinţific, nu ca un simplu termen tehnic într-un limbaj al matematicii. Mai spunem că, graţie principiului continuităţii (de sorginte metafizică), Leibniz a acomodat cu succes continuitatea operaţională a calculului cu restul matematicii finite.

În consonanţă cu cele de mai sus, iată ce spunea Abraham Robinson despre Leibniz: „Deşi aprobă introducerea cantităţilor infinit mici şi infinit mari, Leibniz nu le consideră reale, la fel ca numerele obişnuite «reale», ci le consideră ideale sau ficţiuni, asemenea mai degrabă numerelor imaginare. Totuşi, în virtutea unui principiu general de continuitate, aceste numere ideale erau presupuse ca fiind guvernate de aceleaşi legi ca şi numerele obişnuite"[73].

După Robinson, Leibniz (ca şi, mai târziu, l'Hospital) afirmă că „... două cantităţi pot fi considerate egale dacă ele diferă numai printr-o mărime care este infinit mică relativ la ele. Şi, pe de altă parte, ambii au afirmat că legile aritmetice valide pentru mărimile finite îşi păstrează validitatea şi pentru infinitezimali. Este însă clar că cele două aserţiuni nu pot fi formulate simultan într-un cadru constant. Analiza non-standard ne indică modul în care o modificare relativ mică a acestor idei conduce la o teorie consistentă sau, cel puţin, la o teorie consistentă în raport cu matematica clasică"[74].

Robinson mai spune că, prin faptul că, deşi nu-i recunoştea o realitate *categorematică*, îi acordă totuşi infinitezimalului o realitate *sincategorematică*, Leibniz încearcă să apere o descoperire fundamentală (în faţa criticilor logiciste şi metafizice) nu numai indicându-i valoarea instrumentală, dar şi prezentând-o în aşa fel încât să nu contrazică matematica *legitimată*, a cărei „realitate" este asigurată, şi

---

[72] Vezi I. Pârvu, *op. cit.*, p. 103.

[73] A. Robinson, *The Metaphysics of the Calculus*, în I. Pârvu, *op. cit*., p. 103.

[74] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, 1966 (cap. 10, *Concerning the History of the Calculus*), în I. Pârvu, *op. cit.*, p. 103.

anume a matematicii finite. Iar această continuitate era validă prin apel la „raţiuni supreme”, la principiul metafizic al continuităţii – o lege generală a naturii[75].

Încercând să sistematizăm, referindu-ne la un autor contemporan (John L. Bell), reluăm cele două metamorfoze (relativ recente) ale acestui principiu anunţate mai sus – din analiza nonstandard şi, în special, din SIA. Aici, continuum-ul este legat de abordarea matematică a infinitului şi de tratarea infinitezimalilor lui Leibniz.

În ceea ce priveşte analiza nonstandard a lui Robinson, aceasta este o extensie a analizei matematice, îmbrăţişând deopotrivă „infinitul mare” şi numerele infinitezimale (şi) în care legile uzuale ale aritmeticii numerelor reale continuă să funcţioneze valid – o idee care, în esenţă, cum am văzut, emerge încă de la Leibniz.

Legat de SIA, aceasta realizează într-o manieră foarte eficientă principiul continuităţii al lui Leibniz după care „natura nu face salturi”[76]. În continuare ne vom concentra mai ales asupra acestei perspective, nu înainte de a reda, alături de Bell, câteva corelaţii ale înţelesurilor filosofice ale continuului cu accepţiuni din matematică.

Bell afirmă că opusele concepte de *continuitate* şi *discreţie* sunt foarte prezente în dezvoltarea matematicii, dar au atras atenţia, încă de la început, şi filosofilor. „Entităţile continue” sunt entităţi care se pot divide indefinit fără a fi alterată natura lor esenţială (de ex.: apa dintr-o glastră poate fi divizată indefinit fără a-şi schimba natura de apă (se ignoră natura atomică a materiei). „Entităţile discrete” nu pot fi divizate fără a determina o schimbare în natura lor: „un cauciuc nu mai rămâne astfel după diviziune”[77].

Există, astfel, două proprietăţi contrastante: proprietatea de a fi indivizibil, separat sau „discret”, pe de o parte; pe de alta, avem proprietatea de a fi indefinit divizibil şi *continuu*, deşi nu putem vorbi despre o diviziune actuală *ca atare* indefinită în părţi.

Pe de altă parte, un acelaşi obiect poate fi, într-un sens, posesorul ambelor proprietăţi. O roată poate fi privită simplu ca o piesă din materie, şi atunci poate fi divizată în jumătăţi. Dacă roata văzută ca roată este *discretă*, atunci când este văzută ca piesă a materiei roata este *continuă*. Astfel, *continuitatea* şi *discreţia* sunt atribute complementare originate în abilitatea minţii noastre de a abstractiza: acte care reies din abstragerea divizibilităţii obiectelor şi altele prin abstragerea identităţii proprii entităţii în discuţie[78].

În matematici, conceptul unui *număr întreg* oferă o întruchipare a conceptului de *discreţie pură*, a ideii unei colecţii de obiecte individual separate, ale căror proprietăţi – dincolo de caracterul lor distinct – au fost precizate mai sus. Reprezentarea fundamentală a ideii de continuitate este figura geometrică sau, mai sintetic, linia dreaptă.

---

[75] *Ibidem*.

[76] J.L. Bell, *Infinitesimals and the Continuum*, p. 5, http://publish.uwo.ca/~jbell/New%20lecture %20on%20 infinitesimals.pdf.

[77] *Ibidem*, p. 1.

[78] *Ibidem*.

Bell mai arată că, prin natura lor cea mai proprie, figurile geometrice sunt continue; *discreteţea* este „injectată” (oarecum „din exterior”) în geometrie: în domeniul continuului, *discreteţea* este introdusă prin conceptul unui punct, care este, de fapt, o entitate discretă care formează graniţele unei linii.

În timp ce un continuum este o sursă inepuizabilă de puncte, aceste puncte nu pot fi „reconstituite” astfel încât să formeze continuul din care ele au sărit. În general, gânditorii consideră continuul inexplicabil în termenii discreţiei.

Într-adevăr, am văzut că, pentru Aristotel, niciun continuu nu poate fi făcut din indivizibili, cum este, de exemplu, o linie de puncte – considerând că linia este continuă, iar punctele indivizibile. Pentru Leibniz, la fel, un punct nu poate să fie o parte constitutivă a unei linii.

Bell este de părere că aceste poziţii sunt mai degrabă variante consonante cu formulările teoriei contemporane a mulţimilor din matematică: toate entităţile matematice sunt asamblate din individuali şi aceste entităţi sunt astfel, în ultimă instanţă, ale unei naturi punctate sau discrete. Caracterul întrerupt, punctat, este posedat în particular de mulţimea care conţine „continuul” numerelor reale – oximoronul „continuu aritmetic”. Teoria mulţimilor nu conţine adevăratul continuu, ci un mare număr de false continuuri[79].

Astfel, conceptul de continuu şi cel de *infinitezimal* sunt foarte intim corelate. Infinitezimalul este enunţat de Bell ca ceea ce rămâne după ce un genuin continuu a fost supus unei analize metafizice exhaustive – este continuul văzut ca şi cum ar fi „în mic”. În acest sens, un infinitezimal poate fi luat ca „*ultima parte*” a unui continuu. În acelaşi sens, matematicienii secolului 17 au luat ultimele părţi ale curbelor ca fiind linii drepte infinitezimale[80].

Conform teoriei mulţimilor (sau „înţelegerii discrete”), arată Bell, infinitezimalii sunt nimic altceva decât puncte (sau tonuri singulare). Dar, dacă continuul este cu adevărat ca atare, continuu, şi dacă nu are puncte ca părţi, atunci un infinitezimal în sensul de mai sus, adică ca parte a unui continuu, nu poate fi un punct. Un asemenea infinitezimal poate fi considerat sau ar trebui să fie considerat ca nepunctiform sau continuu.

Un concept relaţionat cu cel al infinitezimalului este cel de *cantitate infinitezimală* – o cantitate care, nenecesar, ar putea coincide cu zero; această cantitate este într-un sens anume mai mică decât orice cantitate finită.

În abordarea „practică” a calculului diferenţial, Bell ne spune că o cantitate infinitezimală sau un număr infinitezimal este atât de mic, încât pătratul şi toate puterile lui mai mari pot fi neglijate, adică reduse la zero – aceste cantităţi sunt numite şi *nilpotent* sau *nilsquare*[81].

Cum am văzut şi mai sus, pentru Leibniz, infinitezimalii sunt „cantităţi nespecificabile/nespecificate/nespecifice”. Puţin mai târziu, De l'Hospital, autorul

---

[79] *Ibidem*, p. 3.
[80] *Ibidem.*
[81] *Ibidem.*

primului tratat despre calcul (1696), invocă conceptul de infinitezimal în postularea că „o linie curbată poate fi văzută ca fiind compusă din infinit de multe segmente de drepte mici” şi că „se pot lua ca egale două cantităţi care diferă prin cantităţi infinit de mici”[82].

Deşi Russell credea că infinitezimalii sunt condamnaţi ca „nenecesari, eronaţi şi auto-contradictorii”, cantităţi inutile şi logic dubioase, despre care se spunea că au fost pentru totdeauna suprimate de conceptul de limită formulat la finele secolului 19, Bell ne va arăta că, de fapt, proscripţia infinitezimalilor nu a avut succes în eliminarea acestora cu totul[83].

Astfel, fizicieni şi ingineri au continuat să îi utilizeze pentru aplicaţii rapide ale calculului la probleme fizice. „Geometrii diferenţiali” Lie şi Cartan s-au bazat pe utilizarea lor în formularea conceptelor care ulterior au fost puse într-o fundaţie riguroasă. Ca alte exemple de celebri susţinători ai infinitezimalilor, Bell îi aminteşte pe Hermann Weyl[84] şi Charles Sanders Peirce (campionul infinitezimalilor)[85].

Bell este de părere că o nouă fază în lunga bătălie dintre continuu şi discret s-a deschis în ultimele decenii prin refundarea conceptului de infinitezimal pe o bază solidă. Acest lucru s-a produs în două moduri esenţial diferite – al analizei nonstandard şi al SIA. Despre analiza nonstandard a lui Abraham Robinson am vorbit mai sus; redăm acum, din perspectiva lui Bell, interesanta raportare a SIA la această chestiune.

În ceea ce priveşte SIA, cu implicarea metodelor teoriei categoriilor, această analiză reprezintă un cadru riguros pentru analiza matematică, în care utilizarea limitelor în definirea noţiunilor de bază ale calculului este *înlocuită* cu utilizarea „infinitezimalilor de putere nulă” (*nilsquare*). SIA oferă o imagine a lumii în care continuul este o noţiune autonomă, neexplicabilă în termeni de discontinuitate – de „discreţie”. În SIA, toate funcţiile sau corelaţiile dintre obiecte matematice sunt „neîntrerupte, continue” – „*smooth*”, adică repetat diferenţiabile doar *arbitrar*, şi continue în particular[86].

Corectitudinea principiului lui Leibniz în SIA, susţine Bell, induce aici o subtilă, dar semnificativă schimbare a logicii: de la logica clasică la cea intuiţionistă. Dacă legea terţului exclus este aplicabilă fără restricţie (ca în logica clasică), mai spune Bell, atunci fiecare număr real x va fi fie egal cu 0 fie neegal cu 0, caz în care corelaţia $0 \to 0$, $x \to 1$ pentru $x \neq 0$ (cunoscuta funcţie „blip”) va defini un

---

[82] *Ibidem*, p. 4.

[83] *Ibidem*.

[84] „Infinitezimalii joacă un rol esenţial în înţelegerea noastră asupra naturii: numai în infinitul mic putem aştepta întâlnirea legilor elementare şi uniforme ale naturii, devreme ce lumea trebuie înţeleasă prin infinitul mic.” *Ibidem*, p. 4.

[85] „Este un fapt singular că nimeni nu a obiectat că *v - 1* presupune vreo contradicţie, nici, de la Cantor, că există cantităţi infinit de mari, deşi prejudiciul antic împotriva cantintăţilor infinit mici rămâne.” „Este dificil de explicat faptul memoriei şi ceea ce pare a fi percepţia noastră a curgerii timpului, decât dacă presupunem extinderea conştiinţei noastre imediate dincolo de un singur moment.” *Ibidem*.

[86] *Ibidem*, p. 5.

grafic/o corespondenţă de la spaţiul R al numerelor reale la mulţimea 2 = {0, 1}; dar aceasta este evident o discontinuitate, contrazicând principiul lui Leibniz. De fapt, de aici rezultă că principiul lui Leibniz implică faptul că legea terţului exclus nu poate fi universal valabil afirmată.

După cum observăm, avem o reiterare a ceea ce, cu Al. Surdu, am văzut că s-a întâmplat iniţial la Aristotel privind validitatea principiului terţului exclus; principiul terţului exclus nu poate avea validitate în SIA[87]. În plus, Bell arată că încă Perice (1903), chiar înaintea lui Brouwer, era conştient de faptul că o perspectivă corectă privind continuul adevărat va implica abandonarea aplicabilităţii nerestrictive a legii terţului exclus[88].

Bell mai arată că, în SIA, continuul este un continuu *adevărat* în sensul lui Anaxagora: acela de a nu presupune părţi care pot fi „tăiate ca de un topor". Dar, lucrul cel mai remarcabil semnalat de Bell este că SIA întruchipează un concept al continuului infinitezimal în forma *vectorilor infinitezimal tangenţi* la curbe. Un vector tangent la o curbă *C* într-un punct *p* pe aceasta este un segment scurt de linie dreaptă *l* trecând prin *p* şi punctând de-a lungul lui *C*. În SIA putem lua *l* ca fiind actual o parte – un microsegment – infinitezimal al lui *C*: astfel, curbele în SIA sunt „local drepte" şi, prin urmare, pot fi concepute ca fiind „compuse din" linii drepte infinitezimale în sensul lui L'Hospital[89].

SIA împărtăşeşte *principiul microrectitudinii pentru curbele smooth*: pentru orice curbă smooth C şi orice punct pe aceasta, avem un segment infinitezimal nondegenerat – un microsegment – al curbei în acel punct care este drept.

Semnalăm că problema ar fi aici legată de înţelegerea punctului: un microsegment de dreaptă infinitezimal în sensul celor de mai sus trebuie să presupună cel puţin două şi cel mult două puncte: al treilea punct *poate face* ca microsegmentul de dreaptă să nu mai fie drept – cele trei puncte pot să nu fie coliniare. Teoria, însă, se protejează pentru că nu admite că dreapta continuului este formată din *puncte* (discontinue)!

Una dintre concluziile lui Bell este că, în SIA, calculul infinitezimal şi geometria diferenţială pot fi dezvoltate într-un elegant şi atractiv mod, *fără apel la limite.* De exemplu, derivativa unei funcţii $y = f(x)$ este dată de unicul număr A astfel încât, pentru orice infinitezimal ε,

$$f(x+\varepsilon) - f(x) = A\,\varepsilon$$

Definind derivativa în acest fel, avem prin aceasta regulile de bază şi procedurile calculului diferenţial reduse la algebra simplă[90].

O concluzie şi mai interesantă, a cărei demonstrare nu o reluăm aici[91], este că respingerea legii terţului exclus în SIA conduce la respingerea unui important

[87] Pentru demonstrarea completă în SIA a acestei asumpţii, vezi p. 6-7 ale textului pe care îl prezentăm.

[88] *Ibidem.*

[89] *Ibidem*, p. 7.

[90] *Ibidem*, p. 9.

[91] *Ibidem*, p. 9-10.

principiu al teoriei mulţimilor, axioma alegerii. Deci, atâta timp cât în SIA poate fi respins principiul terţului exclus, la fel se întâmplă şi cu axioma alegerii. Bell mai spune că eşecul AC (axiomei alegerii) sub condiţiile neîntreruptibilităţii (*smoothness*) în SIA este puţin surprinzător în perspectiva binecunoscutelor consecinţe paradoxale ale AC – una dintre consecinţele axiomei alegerii este faimosul paradox Banach-Tarski[92].

Bell arată că paradoxala descompunere de acest tip devine posibilă doar când obiecte geometrice *smooth* (continue, neîntrerupte), precum sferele, sunt analizate în mulţimi *discrete* de puncte; AC apoi permite ca aceste puncte să fie aranjate într-o manieră arbitrară ***discontinuă*.** De remarcat este că o atare procedură nu este admisibilă în SIA.

Dincolo de imaginea „ideii de continuitate” la Aristotel sau de ipostazierile principiului continuităţii la Leibniz, cu particularităţile şi semnificaţiile ce decurg de aici, această idee – cum am văzut, în esenţă, de sorginte metafizică – a cunoscut o multitudine de întruchipări, în semnificaţia epistemologică a infinitului din matematică (vezi metoda „elementelor ideale” din programul lui Hilbert), precum şi, începând chiar cu Galilei, în ştiinţele naturii şi, mai general, în metodologia matematicii secolului trecut.

Reţinem, în final, prezenţa constantă a „principiului identităţii” (aşa cum a fost dezvoltat acesta la vechii greci şi sistematizat cu Aristotel şi cum a „trecut” spre schematizările din matematici odată cu Leibniz), în principal, dincolo de preluările metamorfozate din metodologia matematicii, *în zonele de cercetare şi de interes din jurul temei infinitului, în general, şi a chestiunii infinitezimalilor, în particular*.

De asemenea, unele consecinţele logice (cum am văzut, trasate încă de Aristotel, precum relativizarea validităţii principiului noncontradicţiei şi a terţului exclus, reiterate parţial de Leibniz) se păstrează atât în analiza nonstandard, cât şi, mai ales, în SIA, unde se face trecerea (autorizată de urmările principiul lui Leibniz) de la logica clasică la cea intuiţionistă, încă cu Charles Sander Peirce şi Jan Brouwer.

După cum am văzut încă la Aristotel, şi în SIA se pare că soluţia paradoxelor constă tot în anumite restricţii ce trebuie impuse prin relaţia continu-discret (discontinuu). Dacă Aristotel oferea o soluţie paradigmatică decelată filosofic şi logic, cu infinitezimalii lui Leibniz pătrundem în zona calculului şi a matematicilor, iar astăzi, vedem, aceste poziţii originare nu par decât a fi mai rafinate.

[92] Orice sferă solidă poate fi descompusă în mai multe bucăţi finite (5) care pot fi reasamblate astfel încât să formeze două sfere solide cu aceeași mărime ca cea originală.