CATEGORII DE NUMERE

IONEL NARIȚA

Numerele nu sunt obiecte[1], deoarece nu au proprietățile obiectelor, nicăieri nu vedem sau nu auzim un număr, iar propozițiile despre numere sunt eterne, spre deosebire de propozițiile despre obiecte a căror valoare de adevăr se schimbă în timp[2]. Pe de altă parte, numerele nu sunt termeni sau nu sunt întotdeauna termeni, deoarece nu le atribuim de fiecare dată aceeași intensiune[3]. Urmează că numerele sunt expresii care pot fi utilizate în cele mai diferite moduri, inclusiv ca nume sau termeni[4].

Numerele se disting de alte expresii prin aceea că formează un sistem și pot fi construite în orice limbaj. Există anumite relații între numere ca simple expresii, chiar dacă nu sunt folosite pentru a surprinde anume înțelesuri. De asemenea, ele pot fi construite în orice limbaj, deoarece sunt expresii sau cuvinte ale *alfabetului minim*[5].

Un limbaj este rodul combinațiilor sau aranjamentelor elementelor unui *alfabet*[6]. De aceea, orice limbaj trebuie să conțină un alfabet, reguli de utilizare a cuvintelor și reguli de construire a propozițiilor sau dispozițiilor[7]. În final, scopul unui limbaj este de a genera propoziții prin care presupunem că anumite relații între parametrii semantici ai expresiilor din cadrul limbajului au loc sau nu și dispoziții prin care asemenea relații sunt proiectate. De aceea, doar propozițiile au valoare de adevăr. De exemplu, expresia „România este regat” este o propoziție falsă, în vreme ce expresia „România să fie regat” nu are valoare de adevăr, ci, cu ajutorul ei, pot fi exprimate ordine, dorințe, rugăminți etc.

Deosebim două niveluri ale unui limbaj, cel în care elementele alfabetului sunt folosite pentru a construi cuvinte și acela în care cuvintele sunt combinate în alte expresii. Cuvintele reprezintă orice combinație a literelor unui alfabet, de aceea, nu există reguli sintactice de construire a cuvintelor, decât în cazul unor

---

[1] Gottlob Frege, *Scrieri logico-filosofice*, I, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1977, p. 29.

[2] Bertrand Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen & Unwin, London, 1930, p. 19.

[3] Gottlob Frege, *Op. cit.*, p. 65.

[4] *Idem*, p. 70.

[5] Ioan Marușciac, *Teoria algoritmilor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1966, p. 10.

[6] *Idem*, p. 9.

[7] Arindama Singh, *Elements of Computation Theory*, Springer, London, 2009, p. 32.

limbaje simbolice unde cuvintele trebuie să fie bine formate pentru a fi interpretabile prin propoziții. De cele mai multe ori, doar unele cuvinte sunt selectate prin reguli semantice, respectiv, numai unor cuvinte li se atribuie înțeles prin reguli sau convenții, generând înțelesul convențional. La al doilea nivel lingvistic, cuvintele sunt aplicate unele altora în așa fel încât să fie puse în evidență diferite relații între parametrii lor semantici. De această dată cuvintele nu pot fi aranjate oricum, ci după anumite reguli sintactice, altfel expresiile obținute nu au înțeles[8].

Alfabetul este alcătuit din *litere* și o *pauză*. Cu ajutorul literelor se compun expresiile limbajului, în speță cuvintele. Între cuvinte, unele joacă un rol aparte, indicând tipul expresiilor, de aceea le numim *indicatori*. Aceștia arată intenția utilizării unei expresii. Uneori, expresiile sunt folosite altfel decât se presupune prin intermediul indicatorilor. În acest caz, fie avem de-a face cu o construcție eronată a expresiilor, fie expresiile sunt utilizate în alt mod decât convențional[9].

Pauza are rolul de a separa cuvintele. Nu putem considera pauza drept o literă pentru că, altfel, cuvintele nu ar putea fi deosebite între ele. O expresie care conține doar litere se numește *cuvânt*[10]. Prin urmare, un cuvânt este o expresie delimitată de pauze. De bună seamă, nu poate exista un alfabet alcătuit doar din litere sau doar din pauze. În primul caz, limbajul ar conține un singur cuvânt, iar în al doilea, doar cuvântul nul, fără nicio literă. Prin urmare, *alfabetul minim* conține o literă și o pauză.

Un cuvânt este întotdeauna încadrat de pauze. Pe de o parte, după un cuvânt trebuie să existe o pauză pentru că, altfel, cuvântul ar continua indefinit. De asemenea, înainte de un cuvânt trebuie să existe o pauză pentru că, întotdeauna, un cuvânt are o primă literă, așa că aceasta nu poate urma după o altă literă, ci doar după o pauză. Constatăm că un cuvânt constă dintr-o combinație de litere mărginită de două pauze.

Dacă ar fi să speculăm, nu se poate ca la început să fi fost cuvântul, ci trebuie să fi fost pauza, iar pauza înseamnă absența cuvântului. Abia când pauza a fost întreruptă de o literă a apărut cuvântul. De pildă, o foaie albă reprezintă o pauză, dacă scriem litera „a”, atunci pauza este întreruptă și pe foaie apar două pauze separate de cuvântul compus din litera „a”.

Nu poate exista un limbaj complet construit peste alfabetul minim, deoarece într-un asemenea limbaj ar putea fi construite doar cuvinte, nu și propoziții. Pentru ca, din cuvinte să fie alcătuite propoziții, pe lângă pauza care delimitează cuvintele ar trebui să poată fi construiți indicatori care să specifice propozițiile cât și alte categorii de expresii. Prin urmare, un alfabet care conține doar o literă nu generează propoziții, peste un asemenea alfabet nu se poate construi o sintaxă. Prin urmare, alfabetul minim permite atingerea doar a nivelului lingvistic al cuvintelor, pe care convenim să îl numim *C-limbaj*.

[8] Marinet Andre, *Elements de linguistique generale*, Armand Colin, Paris, 1980, p. 13.
[9] Marușciac Ioan, *Op. cit.*, p. 27.
[10] *Idem*, p. 11.

După cum am văzut, alfabetul minim conține o literă, „|”, și o pauză „_”. Cuvintele sunt alcătuite din litere și sunt separate de pauze. Orice cuvânt al C-limbajului bazat pe alfabetul minim se numește *număr natural*, *N*. La cuvintele C-limbajului, adăugăm *cuvântul nul*, care nu conține nicio literă, „_ _”, și este denumit *numărul zero*. Prin urmare, expresiile peste alfabetul minim sunt numerele naturale la care se adaugă numărul zero[11]. Mulțimea acestor expresii o notăm prin *M*. Cu alte cuvinte, *M* este alcătuită din mulțimea numerelor naturale la care se adaugă numărul zero: M = N ∪ {0}. Pentru fiecare cuvânt utilizăm denumirile obișnuite ale numerelor, astfel:

_ _ = zero,
_|_ = unu,
_||_ = doi,
_|||_ = trei etc.

Numerele sunt expresii ale oricărui limbaj deoarece alfabetul minim este parte a oricărui alfabet. Obținem numere dacă utilizăm orice literă, de pildă, _ _, _a_, _aa_ etc., pot fi numerele zero, unu și doi. Numai că, de această dată, intervin confuzii pentru că și cuvintele _ _, _b_, _bb_ pot juca același rol, dar acestea nu pot fi confundate cu primele, constând din alte litere. De aceea, confuziile sunt evitate doar pentru alfabetul minim, A2 = {_, |}.

Cuvintele limbajului comun prin care denumim numerele nu sunt numere propriu-zise, ci sunt expresii prin care numerele sunt notate, *numerale*. De pildă, expresia „unu” nu este un număr, ci prin intermediul ei ne referim la numărul _|_. Când spunem că *unu este un număr* avem în vedere înțelesul expresiei „unu” și nu expresia respectivă, așa cum, prin *roșu este o culoare* ne referim la culoarea roșu și nu la cuvântul „roșu”. De obicei, nu se folosesc chiar numerele ci se apelează la denumirile lor deoarece, cu cât sunt mai mari, cu atât expresiile numerice sunt mai lungi și mai dificil de utilizat[12].

Spre deosebire de alte categorii de expresii, numerele alcătuiesc un sistem. De exemplu, între expresii precum „roșu”, „galben”, „portocaliu” etc., nu există vreo relație. Pentru a surprinde culorile putem apela la orice alte expresii. În schimb, expresia _|_ nu poate fi înlocuită cu alta. O asemenea expresie nu are un înțeles separat, ea dobândește diferite înțelesuri după cum este folosită sau în relație cu alte expresii. Pentru numere nu se pot da reguli semantice aparte pentru că în *A2* nu se poate trece dincolo de nivelul cuvintelor. Prin urmare, numerele dobândesc înțeles doar în urma relațiilor dintre ele. Pe de altă parte, într-un limbaj complet, numerelor li se pot asocia cele mai diverse reguli interpretative[13].

---

[11] Gottlob Frege, *Op. cit.*, p. 26.
[12] Richard Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers*, The Open Court, Chicago, 1901, p. 45.
[13] *Idem*, p. 31.

Specificitatea cuvintelor are loc doar în cazul alfabetului minim. De exemplu, expresia _|_ este diferită de orice altă expresie a acestui alfabet. Ea poate apărea de mai multe ori într-un text, dar, de fiecare dată, este aceeași expresie, același cuvânt, având ocurențe diferite. În schimb, „unu” și „one” sunt cuvinte diferite.

Numerele pot fi comparate și, în acest fel, între ele există o relație de ordine. Algoritmul prin care se compară două numere este următorul:

1) Se elimină o literă din fiecare număr.

11. Niciun număr nu devine nul. Treci la (1).

12. Unul dintre numere devine nul. Treci la (2).

13. Ambele numere devin nule. Treci la (3).

2) Numărul care devine nul este *mai mic*. Sfârșit.

3) Numerele sunt *identice*. Sfârșit.

De exemplu, să comparăm numerele a = _||_ și b = _||||_:

1) Din fiecare număr se elimină câte o literă:

a devine _|_ și *b* devine _|||_. Niciun număr nu este nul, se revine la (1):

1a) Din fiecare număr se elimină câte o literă:

a devine _ _ și *b* devine _||_. Doar numărul *a* devine nul, se trece la (2).

2) Numărul *a* este mai mic decât *b*. Sfârșit.

Relația „mai mic” este de ordine strictă. Mai întâi, nu este reflexivă, deoarece, dacă eliminăm câte o literă nu se poate ca unul și același număr să ajungă nul și să nu ajungă nul. De asemenea, avem de-a face cu o relație antisimetrică – dacă un număr este mai mic decât altul și al doilea este mai mic decât primul, înseamnă că, după eliminări succesive de litere ambele numere ajung simultan nule, prin urmare, două numere, unul mai mic decât celălalt, sunt identice. Relația „mai mic” este tranzitivă. Să presupunem că *a* este mai mic decât *b* și *b* este mai mic decât *c*. În acest caz, prin eliminări succesive de litere, numărul *a* ajunge nul înainte de *b*, iar *b* înainte de *c*. Prin urmare, *a* ajunge nul înainte de *c* fiind mai mic decât acesta. Pe de altă parte, prin eliminarea de litere se obțin numere din ce în ce mai mici. Urmează că numărul nul este cel mai mic număr, mai mic decât orice număr natural.

Oricare numere pot fi comparate, deoarece literele oricărui cuvânt peste A2 sunt finite. Prin urmare, algoritmul de mai sus se oprește după un număr finit de pași, indiferent ce numere s-ar compara. În acest fel, dintre oricare două numere unul este mai mic.

În cazul numerelor, relația de conținere sau includere este aceeași cu relația „mai mic”. Dacă un număr este inclus în altul, înseamnă că, eliminând câte o literă, primul ajunge mai repede nul, prin urmare este mai mic, respectiv, $(n \subset m) \equiv (m \geq n)$. De bună seamă, numărul zero este cel mai mic ce poate fi obținut prin alfabetul minim. În acest fel, numărul zero este inclus în orice număr. Pe de altă parte, în cazul numerelor, „mai mic” înseamnă „mai scurt”, respectiv, „cu mai puține litere”. Peste alfabetul minim, cuvântul mai scurt este mai mic și reciproc. În alte alfabete, aceste coincidențe nu au loc. Dacă un cuvânt este inclus în altul este mai scurt, dar nu înseamnă că este mai mic. De exemplu, cuvântul CX este mai scurt decât CIII dar nu este mai mic. În schimb, deși CIII este mai mic decât CX, nu este inclus în acesta.

Inversa relației *mai mic* este relația *mai mare*. Un număr este mai mare decât altul dacă acesta este mai mic decât primul. La fel cu relația *mai mic*, relația *mai mare* este de ordine strictă. De această dată, nu există un număr natural care să fie cel mai mare. Un număr mai mare se obține din unul mai mic prin adăugare de litere. Literele pot fi adăugate oriunde, chiar înaintea primei litere. Deoarece orice număr are o primă literă, înseamnă că la orice număr pot fi adăugate litere, obținând un număr mai mare. Deși nu există cel mai mare număr natural, totuși, nici un număr nu poate avea infinit de multe litere, așa cum rezultă prin inducție completă[14]:

Unu are un număr finit de litere.
Dacă *n* are un număr finit de litere atunci *n+1* are un număr finit de litere.
Prin urmare, orice număr are un număr finit de litere, nu există numere infinite.

Asupra numerelor se pot efectua o serie de operații, cum sunt eliminarea sau introducerea unei pauze sau adăugarea ori ștergerea unei litere. Primele două sunt operații irepetabile și nu pot fi efectuate asupra oricăror numere. De pildă, dacă eliminăm o pauză nu o putem elimina încă o dată sau dacă introducem o pauză, la fel, nu putem repeta operația ci eliminăm sau introducem altă pauză. În schimb, o literă poate fi introdusă sau eliminată de mai multe ori. Pe de altă parte, operațiile cu pauze au loc între cuvinte, în vreme ce operațiile cu litere se aplică unui cuvânt.

La fel ca orice cuvinte, numerele se supun operației de *concatenare*. Concatenarea numerelor este totuna cu reuniunea sau adunarea lor[15]. Prin concatenare înțelegem înlănțuirea a două numere, obținând un nou număr. Concatenarea a două numere se realizează eliminând sau ștergând pauza dintre ele. De exemplu, concatenarea numerelor _||_|||_ se realizează eliminând pauza intermediară, când se obține numărul: _|||||_. Concatenarea sau adunarea numerelor naturale este comutativă, asociativă și admite numărul zero drept unitate.[16] Suma a două numere este mai mare decât numerele adunate[17]. Oricare două numere pot fi adunate, deoarece între orice două numere trebuie să existe o pauză; în absența acesteia, nu am putea vorbi de două numere diferite sau de două ocurențe ale aceluiași număr.

Pe lângă eliminarea unei pauze, o altă operație asupra cuvintelor este introducerea unei pauze între literele unui cuvânt. În acest fel, dintr-un cuvânt dat se obțin două cuvinte. În cazul alfabetului minim, prin inserarea unei pauze, dintr-

[14] Bertrand Russell, *Op. cit.*, p. 6.
[15] Ioan Marușciac, *Op. cit.*, p. 12.
[16] *Idem*, p. 25.
[17] Richard Dedekind, *Op. cit.*, p. 96.

un număr se ajunge la două numere mai mici. De exemplu, din numărul _|||_ se obțin perechi de numere precum _ _|||_, _|_||_, _||_|_ etc. În primul exemplu, pauza este introdusă între prima pauză și prima literă, obținându-se cuvântul nul și numărul inițial, iar în al doilea exemplu, pauza este inserată după prima literă. În acest caz, se obține numărul unu și numărul doi.

Inserarea unei pauze este operația inversă față de eliminarea unei pauze. De aceea, numărul inițial reprezintă concatenarea numerelor rezultate, prin urmare, numărul inițial este suma numerelor obținute: $3 = 0 + 3$; $3 = 1 + 2$; $3 = 2 + 1$; $3 = 3 + 0$. Inserarea unei pauze poate fi înțeleasă și ca extragerea unui număr din altul, așa cum concatenarea duce la adăugarea unui număr la alt număr. De exemplu, prin inserarea unei pauze după prima literă a numărului trei, se extrage numărul unu și rămâne numărul doi[18].

Numărul rămas după extragerea unui număr este *diferența* dintre cele două numere. Bunăoară, diferența dintre trei și unu este doi. Diferența este calculată prin *scădere*. Scăderea are loc după următoarea regulă: dacă scădem un termen al unei sume din sumă se ajunge la celălalt termen. De exemplu, dacă din trei scădem unu obținem doi deoarece trei este suma dintre unu și doi. Prin urmare, diferența dintre trei și unu este numărul doi.

Cu privire la numere, se poate defini *distanța* dintre ele, respectiv, se poate măsura cu cât este mai mare (mai mic) un număr decât altul. Dacă avem în vedere o pereche de numere, (a, b), distanța dintre acestea, $d(a,b)$, se obține extrăgând cel mai mic număr al perechii din cel mai mare; distanța este tocmai diferența dintre cel mai mare și cel mai mic număr al perechii (a, b). De exemplu, $d(1,3) = d(3,1) = 2$. Se demonstrează că distanța dintre numere satisface relația: $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$.

Alte operații asupra numerelor constau în adăugarea sau eliminarea de litere. Dacă adăugăm litere, un număr devine mai mare, iar dacă ștergem litere ajungem la un număr mai mic. Aceste operații nu pot fi reduse la inserarea sau eliminarea pauzelor pentru că literele nu sunt cuvinte.

Numerele naturale sau cuvintele peste alfabetul A2 sunt obținute prin adăugarea sau eliminarea de litere. De exemplu, o foaie albă nu conține nici un cuvânt; putem spune că o foaie imaculată conține doar o pauză sau cuvântul nul. Dacă trasăm o literă pe această foaie obținem numărul unu, pauza inițială este întreruptă prin inserarea literei; iar dacă la acesta mai adăugăm o literă, obținem numărul doi etc. Prin adăugarea de litere la un număr se ajunge la un număr mai mare. Într-adevăr, dacă din numărul inițial și din numărul obținut prin adăugare de litere eliminăm câte o literă, cuvântul inițial ajunge primul nul, prin urmare, este mai mic. În cazul extracției de litere, numărul rezultat este mai mic. Cu alte cuvinte, dacă dintr-un număr dorim să obținem un număr mai mare, adăugăm litere, iar dacă dorim să obținem un număr mai mic extragem, eliminăm sau ștergem litere.

Adăugarea de litere nu poate fi identificată cu îmbinarea sau concatenarea cuvintelor, deoarece nu este o operație binară. În cazul concatenării, din două

[18] Marușciac Ioan, *Op. cit.*, p. 14.

cuvinte se obține un alt cuvânt, în vreme ce, în cazul adăugării de litere, dintr-un singur cuvânt se obține un alt cuvânt. De această dată, avem de-a face cu o operație unară care se aplică unui cuvânt dat. Adăugarea de litere nu înseamnă adăugarea de cuvinte deoarece literele nu sunt cuvinte, chiar dacă un cuvânt este alcătuit din litere. Pentru a avea de-a face cu un cuvânt, pe lângă litere trebuie să intervină pauzele.

Adăugarea de litere este posibilă asupra oricărui număr. Putem adăuga o literă înaintea primei litere a unui număr. Orice număr are o primă literă, prin urmare, oricărui număr îi putem adăuga o literă. La fel, dacă putem adăuga o literă unui număr, putem adăuga oricâte. Prin adăugarea unei litere unui număr se obține un nou număr. Într-adevăr, pauzele care definesc numărul rămân neschimbate, prin urmare, expresia obținută în A2 prin adăugarea unei litere la un număr este un număr.

De asemenea, prin adăugarea de litere la un număr nu obținem două numere diferite, ci un singur număr, determinat. Să presupunem că, adăugând *n* litere la numărul *m* rezultă două numere, m_1 și m_2. Unul dintre aceste numere trebuie să fie mai mic, respectiv să conțină mai puține litere decât celălalt. Înseamnă că nu putem obține numere diferite din același număr adăugând aceleași litere.

Prin adăugarea de litere la un număr dat, acesta se modifică sau se schimbă, rezultând un alt număr. Spunem că are loc o schimbare, o anume expresie se schimbă în alta. De exemplu, dacă la numărul *n* adăugăm *k* litere, se ajunge la un alt număr, *m*. O asemenea schimbare nu poate avea loc fără a se modifica starea lumii, de pildă, dacă am efectua-o pe o foaie de hârtie, nu se poate ca numerele *n* și *m* să fie simultane, ci *m* succedă lui *n* după un anumit timp. Orice schimbare are loc în timp. De pildă, numerele _||_ și _|||_ nu pot coexista în același loc. Fie al doilea urmează primului prin adăugarea unei litere, fie primul succedă celui de-al doilea prin eliminarea unei litere.

Putem reprezenta schimbările de numere prin perechi (n,m), unde *n* este numărul care se schimbă, iar *m* este numărul schimbat sau care rezultă. Dacă *M* este clasa cuvintelor peste alfabetul A2, atunci schimbările de cuvinte sunt elemente ale produsului cartezian[19] $M^2 = M \times M$. (După cum am precizat, *M* conține numerele naturale și numărul zero)[20].

Dacă o schimbare este element al M^2, înseamnă că există submulțimi ale mulțimii M^2 care o conțin, dar submulțimile lui M^2 sunt relații între numere[21]. Prin urmare, schimbările sunt elemente ale unor relații între numere. Aceste relații diferă de relația mai mic/mai mare prin aceea că au loc între numere raportate la contexte diferite. Dacă „mai mic” este o relația ce are loc între două numere indiferent de context, relațiile alcătuite din schimbări se petrec între numere numai relativ la contexte care nu coincid. De exemplu, între două numere scrise simultan pe o foaie de hârtie nu putem spune că are loc o schimbare, ci doar dacă, în locul

[19] Alfred North Whitehead, Bertrand Russell, *Principia Mathematica*, I, Cambridge U.P., Cambridge, 1963, p. 256.

[20] J. A. Schreider, *Equality, Resemblance, and Order*, Mir, Moscow, 1975, p. 16.

[21] *Idem*, p. 17.

unui număr care este scris la un moment dat, apare un alt număr. De aceea, relațiile de acest tip pot fi interpretate prin „în loc de”. Bunăoară, perechea (n,m) poate fi citită „*m* în loc de *n*”.

Două numere, *n* și *m* sunt în relația mai mic/mai mare indiferent de context, dar relația „în loc de” are loc doar dacă le raportăm la contexte diferite și la același loc. Chiar dacă avem în vedere două numere în contexte diferite, nu înseamnă că ele sunt unul în locul celuilalt decât dacă ne raportăm la același loc. În schimb, indiferent de timp sau loc, două numere diferite sunt unul mai mare decât celălalt. Vom numi *intercontextuale* relațiile în care numerele sunt raportate la momente diferite dar la același loc.

Dacă o relație intercontextuală este funcție[22], aceasta se numește *transformare*[23]. Prin urmare, în cazul limbajului A2, transformările sunt funcții definite pe mulțimea *M* cu valori în *M*, cu alte cuvinte, acestea sunt *funcții numerice*, $T: M \to M$. Am văzut că adăugarea de litere unui număr îndeplinește toate condițiile pentru a reprezenta o transformare, deoarece este aplicabilă oricărui număr și conduce la un număr și numai unul[24].

În schimb, eliminarea sau ştergerea literelor nu reprezintă o transformare deoarece există elemente ale lui *M* la care nu poate fi aplicată. Prin urmare, nu este definită pentru orice număr. De exemplu, ștergerea a *k* litere nu este definită pentru numerele mai mici decât *k*. Pentru numărul vid nu este definită decât ștergerea identică, respectiv, ștergerea niciunei litere, care lasă numerele neschimbate.

Dacă avem în vedere transformarea reprezentată de adăugarea unei singure litere, cu ajutorul acesteia pot fi obținute toate numerele naturale pornind de la cuvântul nul. Într-adevăr, diferența dintre două numere poate fi de cel puțin o literă. Numerele naturale diferă între ele numai prin litere, prin urmare, cea mai mică diferență constă într-o singură literă. Urmează că, adăugând o literă unui număr obținem numărul imediat mai mare, între acestea nu pot exista alte numere. Faptul că prin transformarea „adăugarea unei litere” pornind de la cuvântul nul se obțin toate numerele naturale rezultă și prin următorul raționament:

Cuvântul nul este cel mai mic număr.
Dacă la un număr se adaugă o literă se obține numărul natural imediat mai mare.
*Adăugând câte o literă la numărul zero se obțin toate numerele naturale.

Aici, dacă prin „imediat mai mare” înțelegem „succesor”, obținem relațiile dintre numere date de axiomele lui Peano, numai că, în cazul acestora, nu este clar ce înseamnă succesor. De aceea, axiomele lui Peano[25] nu descriu numerele naturale

[22] *Idem*, p. 25.
[23] Richard Dedekind, *Op. cit.*, p. 50.
[24] Ioan Marușciac, *Op. cit.*, p. 20.
[25] Bertrand Russell, *Op. cit.*, p. 5.

ci sunt aplicabile oricărei succesiuni. De această dată, un număr este succesor altuia când este obținut din acesta prin adăugarea unei litere[26].

Sub acest înțeles al termenului „succesor”, axiomele lui Peano pot fi demonstrate. Zero este un număr, deoarece este un cuvânt, chiar dacă este cuvântul nul. Succesorul oricărui număr este un număr deoarece dacă adăugăm o literă unui cuvânt obținem un cuvânt. Oricare două numere nu au același succesor, pentru că, dintre oricare două numere, unul este mai mare și altul mai mic, ori, prin adăugarea unei litere la acestea nu se obțin cuvinte identice. Zero nu este succesorul nici unui număr pentru că nu conține nici o literă, prin urmare, nu poate fi obținut prin adăugarea unei litere.

Putem alege numărul zero ca origine și transformarea u: M $\rightarrow$ M, u(n) = „adăugarea unei litere la numărul *n*” ca unitate, iar prin aplicarea repetată a transformării unitate la origine se obțin toate numerele naturale[27]. Aplicarea repetată a unei transformări înseamnă compunerea ei cu ea însăși. În cazul transformării *u*, compunerea cu ea însăși este posibilă deoarece domeniul ei este și codomeniu.

Funcțiile f: A $\rightarrow$ B și g: C $\rightarrow$ D sunt compozabile numai dacă domeniul celei de-a doua este codomeniul primei funcții, obținându-se (gof): A $\rightarrow$ C. În cazul de mai sus, fiind vorba de compunerea unei funcții cu ea însăși, unde domeniul și codomeniul sunt identice, desigur că se poate defini compusa, (uou): M $\rightarrow$ M. Compunerea repetată a unei funcții cu ea însăși, în cazul nostru, al unei transformări, se numește *iterație*.

De pildă, dacă aplicăm unitatea originii se obține numărul unu, dacă aplicăm din nou unitatea numărului unu se obține numărul doi etc.:

u(_ _) = _|_, u(_|_) = _||_, u(_||_) = _|||_, …, respectiv,
u(0) = 1, u(1) = 2, u(2) = 3, …

Dacă înlocuim argumentele transformării unitate prin iterația corespunzătoare a unității relativ la origine[28], se obține:

u(0) = 1, uu(0) = 2, uuu(0) = 3, …

Constatăm că originea și unitatea sunt suficiente pentru a obține orice număr natural. În cazul în care fiecare aplicare a unității la origine o înlocuim cu o literă obținem numerele corespunzătoare *ordinului* iterației unității. De pildă, iterația u(0) are ordinul unu, iterația uu(0) are ordinul doi deoarece, prin înlocuirea unității cu litere obținem cuvântul _||_ etc. Constatăm că aplicând iterația de ordinul *n* a unității originii, obținem tocmai numărul *n*:

1u(0) = 1, 2u(0) = 2, 3u(0) = 3, …, nu(0) = n, …

[26] *Idem*, p. 7.
[27] *Idem*, p. 3.
[28] Gottlob Frege, *Op. cit.*, p. 83.

Convenim ca neaplicarea unității la origine să fie considerată ca iterație de ordinul zero, astfel că regula de mai sus se extinde și asupra originii: 0u(0) = 0. Iterațiile unității sunt, la rândul lor, transformări ale numerelor peste alfabetul A2. De exemplu, nu(m) reprezintă transformarea nu: M → M, nu(m) = m+n. Observăm că transformările de cuvinte peste A2 sunt exprimate prin numere, deoarece, constând în adăugarea sau ștergerea de litere, ele diferă după câte litere sunt adăugate sau șterse, iar aceste litere constituie numere. Totuși, aici avem de-a face cu o altă categorie de numere, a căror utilizare este distinctă, deoarece ele indică ce transformare se aplică unui anumit cuvânt.

În cazul expresiei nu(m) = m + n, suma nu se confundă cu suma rezultată prin concatenarea numerelor. De această dată, suma nu este comutativă. Prin „m + n" înțelegem că transformarea *nu* se aplică numărului *m*, pe când, prin „n + m" se înțelege că transformarea *mu* se aplică numărului *n*. Cu toate acestea, rezultatul sumei „n + m" este același cu al sumei „m + n"[29]. Dacă o asemenea sumă are mai mulți termeni, ea reprezintă compunerea mai multor transformări, respectiv, suma „m + n + p" este transformarea pu(nu(m)) – la numărul *m* se adaugă *n* litere iar la numărul astfel obținut se mai adaugă *p* litere. Rezultă același număr ca prin concatenarea numerelor *m*, *n* și *p*. Față de termenii care indică transformări, suma este comutativă, deoarece este totuna ca mai întâi să fie adăugate *n* litere și apoi *p* litere sau invers.

Constatăm că trebuie să deosebim între mai multe utilizări ale numerelor. Mai întâi, numerele indică o stare, ca în exemplul: „Pe foaia *A* este scris numărul *n*". De asemenea, numerele stau pentru o transformare, cum este „Numărul scris acum pe foaia *A* este mai mare cu *n* față de numărul scris acum două zile pe foaia *A*"[30]. Totodată, numerele sunt folosite pentru a pune în evidență schimbări: „Numărul scris pe foaia *A* s-a schimbat de la *m* la *n* de ieri până astăzi". Fiecare dintre aceste categorii de numere se comportă diferit în ce privește raționamentele în care intervin sau calculele efectuate asupra lor.

De exemplu, din premisele „Pe foaia *A* ieri era scris numărul *m*", „Pe foaia *A* astăzi este scris numărul *n*", rezultă drept concluzie o propoziție de transformare: „Numărul scris pe foaia *A* s-a modificat cu n-m" sau o concluzie de schimbare: „Numărul scris pe foaia *A* s-a modificat de la *m* la *n*". În schimb, dintr-o premisă de stare și una de transformare rezultă o propoziție de stare. Bunăoară, din „Pe foaia *A* ieri era scris numărul *m*" și „Numărul scris pe foaia *A* este mai mare cu *n* față de ieri", rezultă concluzia: „Numărul scris pe foaia *A* este m + n".

Orice transformare poate fi compusă cu ea însăși sau iterată. De pildă, dacă iterăm transformarea *nu* asupra originii obținem numerele: nu(0), nu(nu(0)), …, nu(…(nu(0))) etc. La fel ca pentru iterația unității, ordinul iterației transformării *nu*

[29] *Idem*, p. 85.

[30] Numerele *n* din cele două propoziții nu pot fi confundate deoarece o transformare nu este un număr, chiar dacă poate fi indicată printr-un număr. Nu putem scrie transformarea „adaugă *n* litere" ca un număr.

poate fi exprimat cu ajutorul unui număr, *m*: 1nu(0), 2nu(0), …, mnu(0). Putem scrie aceste transformări ca iterații ale unității: (mn)u(0). Expresia „mn” reprezintă *produsul* numerelor *m* și *n*, arătând gradul iterației unității în acest caz. Produsul este comutativ, asociativ, numărul unu joacă rolul de unitate, iar zero este element absorbant.

De bună seamă, putem alege ca unitate orice transformare diferită de transformarea identică. Dacă selectăm transformarea *T* atunci aplicarea repetată a ei la origine generează numerele: 0T(0), 1T(0), 2T(0), …, nT(0) etc. În acest mod, nu sunt obținute toate numerele naturale. De pildă, dacă T = nu, atunci se obțin numerele: 0, n, 2n, 3n etc.

Pentru a obține alte numere, unitatea *T* trebuie *divizată*. Dacă T = nu, înseamnă că este compusă din *n* unități naturale. Prin urmare, unitatea naturală este u = (1/n)T. Putem trece de la o unitate la alta în următorul mod:

1) Numerele naturale sunt: 1u(0), 2u(0), 3u(0), …;
2) Substituim *u* prin unitatea *T*, ținând seama că u = (1/n)T;
3) Șirul numerelor naturale dacă alegem unitatea *T* este: (1/n)T(0), (2/n)T(0), (3/n)T(0), …, (m/n)T(0).

Numerele „m/n” se numesc *raționale* și reprezintă ordinul diviziunii la care este supusă o transformare pentru a obține un număr natural din origine[31]. De pildă, numărul „(m/n)T(0)” este 0 + (m/n)T = 0 + m(1/n)T = 0 + mu = m. Prin aplicarea unui număr rațional la o transformare nu obținem întotdeauna un număr natural. De pildă, dacă la transformarea T = nu aplicăm diviziunea m/p, obținem numărul 0 + m/p = m/p. Condiția ca m/p să fie un număr natural este să existe numărul natural *k* astfel încât m = kp.

Constatăm că, pe lângă numerele naturale trebuie admise și numerele raționale care nu sunt întotdeauna naturale. Exprimarea acestora nu poate fi realizată în A2, unde toate cuvintele alcătuite din litere sunt numere naturale, prin urmare, pentru a exprima numerele raționale trebuie adăugate alte litere, apelând la un alfabet mai vast. În acest fel, nu este obligatoriu ca numerele raționale să fie exprimate în orice limbaj, deoarece orice alt alfabet diferit de A2 nu este minim, pot fi construite limbaje care să nu îl utilizeze. De fapt, multă vreme, limbajul a funcționat foarte bine fără a avea expresii pentru numere raționale.

Pentru a exprima noi numere se adaugă alfabetului A2 alte litere cu ajutorul cărora sunt exprimate noile numere sau sunt construiți indicatori care să fie aplicați numerelor naturale. De pildă, s-ar putea utiliza litere diferite pentru fracțiile alicvote de forma 1/n, așa cum procedau vechii egipteni. Celelalte fracții pot fi exprimate prin produsul fracțiilor alicvote cu numere naturale. Dacă observăm că numerele raționale sunt perechi ordonate de numere naturale, putem construi un indicator care să stabilească ordinea sau rolul celor două numere componente ale

[31] Richard Dedekind, *Op. cit.*, p. 3.

unui număr rațional, să arate care este numitorul și care este numărătorul. De exemplu, dacă, la A2, adăugăm litera „/”, ajungem la alfabetul A3 = {_, /, |}, peste care putem formula cuvinte care sunt numere raționale. De exemplu, expresia _||_/_|||_ este numărul rațional 2/3.

Așa cum putem folosi orice transformare ca unitate, orice cuvânt peste A2 poate fi utilizat ca origine pentru a genera numerele naturale. De pildă, dacă aplicăm iterația unității *nu* la cuvântul *m*, obținem cuvântul nu(m) = m + n. Dacă am alege ca origine numărul *m*, prin aplicarea repetată a unității s-ar construi numerele m, m + 1, m + 2, m + 3, … etc., respectiv, toate numerele naturale mai mari decât *m*. În schimb, numerele mai mici decât *m* ar rămâne neexprimate.

Pentru a exprima numere mai mici decât originea, putem folosi *inversa unității*, respectiv, relația u^{-1} sau -u. Dacă unitatea constă în adăugarea unei litere la un cuvânt, inversa reprezintă înlăturarea sau ștergerea unei litere. În acest fel, aplicând inversa unității la un număr se obține un număr mai mic. De exemplu, -u(_|||_) = _||_. Dacă aplicăm iterații ale inversei unității la originea *m*, obținem numerele: m, -u(m), -u(-u(m)), …, -u(-u…(-u(m))) etc., care pot fi reprezentate în același fel ca și iterația unității, folosind numere: 0(-u)m, 1(-u)(m), 2(-u)(m), …, n(-u)(m).

De această dată, șirul iterațiilor nu poate continua la nesfârșit, ca și în cazul iterațiilor unității. De exemplu, pentru n = m se obține m(-u)(m) = 0, o iterație mai mare decât *m* nu este definită în *M* pentru că nu există nici un număr, *h*, peste alfabetul minim astfel încât h = (m + 1)(-u)(m). Inversa unității este rezultatul *rotației* unității, -u = ru, de unde rezultă r = -1, numit *număr negativ*.

Alte transformări sunt reductibile la unitate prin iterație sau diviziune deoarece prin asemenea operații se obțin transformări mai mari sau mai mici decât unitatea. În schimb, despre inversa unității nu putem spune că ar fi mai mare sau mai mică. Dacă aplicăm unitatea la numărul doi obținem trei, iar dacă aplicăm inversa unității la doi ajungem la unu. Pe de altă parte, d(2,3) = d(2,1), adică, efectul unității și a inversei unității este același ca mărime. De aceea, transformările și, totodată, numerele care le revin sunt caracterizate nu numai prin mărime, dar și prin *orientare*. În vreme ce iterațiile și diviziunile unității au mărimi diferite dar aceeași orientare, rotațiile unității au aceeași mărime dar orientări diferite. Numerele rezultate prin aplicarea transformărilor cu aceeași orientare alcătuiesc o axă sau o dreaptă, în vreme ce numerele care sunt rezultatul transformărilor cu aceeași mărime, dar având orientări diferite, formează un cerc.

Prin iterația sau diviziunea inversei unității se obțin celelalte numere negative, respectiv, -u = -1u, -u(-u) = -2u, …, -u(…(-u)) = -nu. Transformarea „-nu(m)” înseamnă că din numărul *m* se șterg *n* litere, obținându-se numărul p = m - n.

Inversa unității poate fi aplicată oricărui număr natural, dar nu se aplică pentru numărul zero, deoarece acesta nu are nicio literă. De aceea, la fel ca în cazul diviziunii, pentru ca inversa unității să fie o transformare, trebuie să admitem, pe lângă numerele pozitive, *numerele negative*. Acestea nu pot fi exprimate în interiorul alfabetului minim, ci, admițând numerele negative, alfabetul trebuie extins introducând alte litere prin care să fie construit un indicator pentru rotație, ajungând la alfabetul A4 = {_, /, -, |}. De pildă, expresia din A4 „_-_|||_/_||_” trebuie citită „-3/2”. Un asemenea alfabet asigură că toate iterațiile și diviziunile unității sunt transformări. Totuși, încă nu este un alfabet suficient pentru a permite inclusiv ca toate rotațiile unității să fie transformări.

Putem considera rotația ca o transformare aplicată transformărilor, când dintr-o transformare se obține alta. De exemplu, prin rotația „-1”, din *u* se obține–*u*, din *2u* ajunge la *-2u* și, în general, de la transformarea *nu* se ajunge la transformarea *–nu*. La rândul ei, la fel cu iterația și diviziunea, rotația poate fi iterată, divizată sau rotită. De pildă, iterând rotația unității, obținem din nou unitatea: -(-u) = u, deoarece inversa inversei unei transformări este acea transformare, respectiv, $(-1)^2 = 1$.

Datorită faptului că rotația (-1) poate fi iterată, putem presupune că aceasta este rezultatul iterației unei alte rotații sau că, la fel cu iterațiile, rotațiile pot fi divizate. Dacă notăm cu *i* rotația a cărei iterație este (-1), obținem -1u = i(iu), inversa unității este rezultatul aplicării rotației *i* a unității la ea însăși. Numărul *i* are proprietatea că ii = -1, respectiv, $i^2 = -1$ sau $i = \sqrt{(-1)}$[32]. Să remarcăm că aici nu este compunerea lui *iu* cu *iu* când ar rezulta transformarea *2iu*, ci este rotirea lui *iu* cu *i* când rezultă i^2u.

În acest fel, ajungem la numerele complexe, z = a + bi, prin care reprezentăm atât iterațiile, cât și diviziunile și rotațiile unității. De exemplu, (a + bi)u este transformarea obținută prin compunerea dintre iterația *au* a unității și iterația *bu* a rotației unității sub un unghi drept. Dacă aplicăm o asemenea transformare originii, ajungem tocmai la un număr complex: (a + bi)u(0) = 0 + a + bi = a + bi. Reprezentarea numerelor complexe presupune un alfabet mai bogat, unde să fie adăugați indicatori pentru rotația în unghi drept și pentru compunerea transformărilor. Numerele complexe nu pot fi înțelese decât într-un alfabet în care să poată fi reprezentate și transformări sau funcții numerice[33].

Așa cum am văzut, numerele se caracterizează prin mărime și orientare, adică z = |z|(z), unde |z| este mărimea numărului *z*, iar (z) este orientarea sa. Putem exprima orientarea unui număr:

z = a + bi
z = |z|(z)
|z|(z) = |a| + |b|i
(z) = (|a|/|z|) + (|b|/|z|)i, unde
(|a|/|z|) + (|b|/|z|) = 1

[32] Gottlob Frege, *Op. cit.*, p. 146.
[33] *Idem*, p. 147.

Numerele |a|/|z| și |b|/|z| sunt notate prin *sinA* și *cosA*, unde *A* reprezintă mărimea orientării sau a rotației unității presupusă de numărul respectiv, și se numește *unghi*. Prin urmare, z = |z|(cosA + isinA). Dacă notăm unghiul corespunzător inversei unității cu π, putem ajunge la unghiul corespunzător rotației perpendiculare *i*:

(-1) = (i) o (i)
(-1) = 2(i)
π = 2(i)
(i) = π/2.

Am putea interpreta numerele astfel încât să fie necesare numai numerele naturale la care se adaugă numărul zero. După cum am văzut, -1 și *i* sunt rotații ale numărului natural unu. Prin urmare, ele pot fi introduse într-un limbaj ca indicatori, rămânând ca numerele naturale să fie reprezentate printr-o singură literă. La acestea, se adaugă cuvântul nul pentru numărul zero, asupra căruia orice iterație, diviziune sau rotație nu are nici un efect, deoarece acestea privesc literele și cuvintele alcătuite din litere. O expresie precum *ni* nu ar fi un produs între două numere, ci un număr natural, *n,* la care s-a adăugat un indicator care arată că transformarea *n* este rotită în unghi drept.

Numerele pot fi folosite în cele mai diferite moduri. Avantajul lor față de alte expresii este că, așa cum sunt construite, alcătuiesc un sistem, de aceea există propoziții despre numere, de aceea există aritmetica și, totodată, de aceea nu există o aritmetică pentru orice categorie de expresii. Ele pot fi atribuite unor intensiuni fără a ține seama de relațiile dintre ele, întâmplător sau arbitrar, la fel cum sunt atribuiți termeni oarecare, dar pot fi asociate intensiunilor potrivit relațiilor dintre numere și, în acest fel, putem analiza relațiile dintre intensiuni prin intermediul relațiilor dintre numere. În acest caz, calculul numeric permite punerea în evidență a unor asemenea relații, calculul devine un mijloc de decizie asupra valorii propozițiilor. De exemplu, dacă sunt date propozițiile „*a* are *n* metri înălțime" și „*b* are *m* metri înălțime", putem stabili valoarea de adevăr a propoziției „*a* este mai înalt decât *b* cu *p* metri" verificând dacă n – m = p, respectiv, extrăgând cuvântul *m* din *n* și comparând rezultatul cu numărul *p*.

Dacă $f_1, \ldots, f_n$ sunt intensiuni contrare între ele, putem construi genul acestora prin compunere sumativă: $S = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ și să adăugăm negația genului, ajungând la scala /S, S*/ = /f_1, f_2, … f_n, S*/. Intensiunile f_i sunt supraordinate față de *S*, putând fi obținute adăugând sens la sensul lui *S*. Putem face acest lucru folosind numere, când f_n = nS, iar pentru S* atribuim numărul zero: S* = 0S. În acest fel, numerele joacă rolul unor negații care, aplicate unor termeni, generează termeni contrari. De pildă, aplicând numărul zero lui *S* se obține negația acestuia. La fel, din *S*, prin adăugarea de numere ajungem la termeni contrari care sunt speciile lui *S*. De exemplu, „înalt de doi metri" este contrar față de „înalt de trei metri”. Putem trece de la o specie la alta prin transformări, de exemplu, de la primul la al doilea contrar de mai sus putem trece adăugând un metru. În acest fel, numerele care privesc transformări neagă termenul la care se aplică, obținând un termen contrar.

După cum aplicarea numărului zero duce la negarea genului, aplicarea unui număr de transformare unei specii duce la negarea acesteia. La rândul său, zero este compunerea conjunctă a negațiilor speciilor: $0S = \&_i(n_iS)^*$, respectiv, $(0S)^* = \vee_i(n_iS)$. Prin urmare, numerele servesc pentru a pune în evidență diferite relații sau operații logice, cum ar fi relația dintre specie și gen sau relațiile dintre specii ori relațiile din interiorul unei scale[34].

Dacă analizăm o propoziție precum: „Trei atleți au sărit de trei ori trei garduri înalte de trei metri” constatăm că numărul *trei* este folosit, de fiecare dată, cu înțeles diferit. Nu putem spune că este vorba de același înțeles pentru că fiecare dintre ocurențele numărului trei are o sintaxă specifică în expresia de mai sus[35]. Prin urmare, numerele sunt expresii care își găsesc cele mai diverse utilizări în comunicare și, într-un anume sens, sunt cele mai simple cuvinte pentru că unele dintre ele pot fi construite utilizând doar resursele alfabetului minim.

[34] Alfred North Whitehead, Russell Bertrand, *Op. cit.*, p. 231.

[35] Louis O. Kattsof, *A Philosophy of Mathematics*, The Iowa State College Press, Ames, 1949, p. 39.