# LOGICĂ ŞI EPISTEMOLOGIE

## PARADOXURILE ŞI METODA RAŢIONAMENTULUI DIAGONAL

IANCU LUCICA
Universitatea de Vest, Timişoara

**The Paradoxes and the Diagonal Argument Method**. The present study is a survey of the applications for the diagonal argument and the *Fixed Point Theorem* in the field of logic. We are mainly concerned with the application of the argument regarding the study of the paradoxes in logic. By means of *Fixed Point Theorem*, we notice the reactivation of validity paradox, an older theme of logic linked with Curry's paradox, Löb's paradox and the paradoxes of the implication concept. Together, they provide a new content for the formal ideas of *truth, demonstrability* and *expressibility*. Regarding the notion of *demonstrability*, by solving Henkin's problem, M. Löb (1955) came to an interesting logic distinction: relative to a recursive arithmetic formal system *S*, we always find a difference between what is effectively demonstrated in the system and that what we are told to be demonstrated. The study presents these problems in an accessible form with adequate commentary and lacking formal excesses.

**Keywords**: paradoxes of the implication, Diagonal Argument Method, truth, demonstrability, expressibility

### 1. INTRODUCERE

Cunoscut din Antichitate, fenomenul paradoxurilor a redevenit actual spre sfârşitul secolului XIX, odată cu apariţia teoriei mulţimilor şi a logicii matematice, păstrându-şi de atunci nealterat interesul ştiinţific şi filosofic până în zilele noastre. Un rol hotărâtor în relansarea problemei l-a jucat *Principia Mathematica*, celebra lucrare elaborată de Alfred North Whitehead şi Bertrand Russell între 1910 şi 1913, care, odată cu definitivarea noii logici, a dat şi prima soluţie la problema paradoxurilor. Aşa numita teorie a tipurilor logice, preconizată de B. Russell încă din *Principles of mathematics* (1903), reluată şi perfecţionată în *Principia Mathematica*, reprezintă şi astăzi cadrul de referinţă al discuţiilor despre paradoxuri şi despre soluţiile acestora.

Cei o sută de ani care ne despart de prima ediţie a *Principiei Mathematica* au produs modificări adânci în toate compartimentele logicii matematice, inclusiv în problema paradoxurilor, care înregistrează, odată cu noile paradoxuri, noi atitudini şi modalităţi de abordare. *Dialetheismul* lui Graham Priest, *aporetica* lui Nicholas Rescher, *paradoxologia* lui Krish Kandiah, *teoria sistemelor formale inconsistente, dar netriviale* (aşa numita *logică paraconsistentă*), sunt numai câteva dintre ele.

Rev. filos., **LXII**, *1*, p. 5–29, Bucureşti, 2015

Ce este paradoxul?

Semnificațiile termenului „paradox” sunt asociate în mod constant ideii de contradicție. În *Teoria sistemelor logice* (1976), Gh. Enescu reproduce nu mai puțin de patru definiții ale termenului, toate axate pe contradicție:

I. Paradox = contradicție formală dedusă într-un sistem teoretic (definiție relativă la sistem),
II. Paradox = contradicție între două propoziții *a* și *b*, astfel că $a = \bar{b}$; din presupunerea lui *a* urmează *b*, iar din presupunerea lui *b* urmează *a*.
III. Paradox = propoziție din care se poate deduce o contradicție (în sensul lui II).
IV. Paradox = contradicție formală irezolvabilă cu mijloacele logice de care se dispune la un moment dat.

La acestea, Enescu adaugă şi două accepțiuni mai speciale impuse de teoremele lui Gödel de incompletitudine, precum şi de unele situații din ştiință, în special din fizică:

V. Paradox = propoziție adevărată care prin încercarea de a o demonstra într-un sistem duce la contradicție.
VI. Paradox = contradicție între două propoziții, ambele adevărate, dar luate într-un context nepotrivit[1].

Definiții similare întâlnim la mai toți autorii secolului XX preocupați de fenomenul paradoxurilor. În *Foundations of Mathematical Logic* (1967), de exemplu, H. B. Curry spune că:

> descoperirea făcută la începutul secolului al XX-lea, că există argumente care – deşi perfect valabile din punct de vedere intuitiv – conduc totuşi la contradicții, a căzut ca o bombă. Astfel de argumente se numesc în prezent *paradoxe* sau *antinomii*[2].

Ceva asemănător spune şi Elliot Mendelson în ediția a patra a cărții sale *Introduction to Mathematical Logic* (2001), unde vorbeşte despre paradoxuri ca despre „argumente ce duc la contradicții”[3]. Mendelson apreciază ca mai importante opt paradoxuri pe care le expune fără comentarii – paradoxul lui Russell, paradoxul lui Cantor, paradoxul lui Burali-Forti, paradoxul mincinosului, paradoxul lui Richard, paradoxul lui Berry, paradoxul lui Grelling şi paradoxul lui Löb.

Deşi continuă să vadă în contradicție numitorul comun al paradoxurilor, mulți dintre autorii actuali preferă în definițiile lor termeni mai simpli, cum ar fi *acceptabil*, *valabil*, *incontestabil* etc., forțând astfel extensiunea termenului „paradox”. După ştiința mea, cel care a dat tonul în tot acest proces de regândire logică a paradoxurilor a fost R. M. Sainsbury cu cartea sa, *Paradoxes* (1981):

> Un paradox poate fi definit ca o concluzie inacceptabilă derivată prin raționamente aparent acceptabile din premise aparent acceptabile[4].

[1]Gh. Enescu, *Teoria sistemelor logice*, p. 105.
[2] Citat după trad. românească, în vol. *Logică şi Filozofie*, p. 201.
[3] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, p. 1.
[4] R.M. Sainsbury, *Paradoxes* (second edition), p. 3.

Termenii *acceptabil*/*inacceptabil* nu fac parte din vocabularul logicii, ei sunt luaţi aici în înţelesul lor intuitiv, şi pot genera probleme în lipsa unor definiţii şi reguli precise de utilizare (criteriile de acceptabilitate ale propoziţiilor pot fi diferite în trecerea de la o teorie la alta, ca să nu mai vorbim de acceptabilitatea inferenţelor, demonstraţiilor, definiţiilor ş.a.). În orice caz, definiţia lui Sainsbury i-a dat posibilitatea lui Michael Clark să enumere în *Paradoxes from A to Z* (2007) nu mai puţin de 85 de paradoxuri (ediţia a doua consemnează cu zece paradoxuri mai mult decât prima şi probabil că celelalte ediţii au adus completări noi).

Inspirat de definiţia lui Sainsbury, *Dicţionarul de Filosofie Oxford* dă termenului „paradox" o definiţie similară:

> Un paradox apare atunci când un set de premise în aparenţă incontestabile conduce la concluzii contradictorii sau inacceptabile[5].

Conform *Dicţionarului*, două sunt situaţiile subsumate paradoxului – contradicţiile şi concluziile logic inacceptabile –, ambele rezultând din premise „în aparenţă incontestabile". La fel în dicţionarul lui Antony Flew, care la termenul „paradox" are următoarea explicaţie:

> Situaţie ce se iveşte atunci când, din anumite premise ce sunt acceptate toate ca adevărate, se ajunge printr-un raţionament deductiv valid la o concluzie care este fie intrinsec contradictorie, fie aflată în dezacord cu credinţele îndeobşte acceptate[6].

Şi aici termenul „paradox" se referă la raţionamente cu aparenţă de validitate, acesta duce fie la „concluzii contradictorii", fie la „concluzii în dezacord cu credinţele îndeobşte acceptate".

Acelaşi gen de definiţie îl întâlnim şi în recenta carte a lui Roy T. Cook, *Paradoxes* (2013), unde, prin „ paradox", autorul înţelege un argument ce satisface câteva condiţii: *a*) premisele argumentului sunt adevărate sau, în orice caz, neproblematice, *b*) operează cu reguli valide de raţionare, *c*) concluzia argumentului este falsă, absurdă, necorespunzătoare (*inappropriate*) sau inacceptabilă.

Aceste definiţii, şi lista poate fi continuată, dau posibilitatea operării cu două sensuri ale termenului „paradox". Un sens tare, acesta însemnând contradicţia realizată în mod expres sau explicit; şi un sens slab (sau larg), în care contradicţia este doar implicită. Paradoxurile din enumerarea lui Mendelson, de exemplu, sunt paradoxuri în sensul tare al cuvântului, în toate aceste paradoxuri contradicţia se realizează explicit, spre deosebire de *paradoxul iertării*, să zicem, unde contradicţia este doar implicită.

Se pleacă de la premisa „adevărată şi neproblematică" privind actul iertării. Acesta se aplică sau celor care merită, sau celor care nu merită. Dacă se aplică

[5] S. Blackburn, *Oxford. Dicţionar de filosofie*, p. 284
[6] A. Flew, *Dicţionar de filosofie şi logică* (trad. D. Stoianovici), p. 250.

celor care merită, iertarea nu îşi are rostul, iar dacă se aplică celor care nu merită, iertarea nu se poate realiza. Prin urmare, fie că se aplică celor merită, fie celor care nu merită, iertarea nu este posibilă.

Paradoxul, din câte observăm, are forma unei dileme simple. Contradicția, ca să revenim la problema noastră, apare între concluzia raționamentului şi faptul iertării din viața de toate zilele unde iertarea este nu doar posibilă, de multe ori ea este chiar necesară. O contradicție implicită, la fel ca în paradoxul confirmării (C. Hempel), paradoxul votului, paradoxurile soritice şi multe alte paradoxuri despre care nu am vorbit aici, dar care pot fi discutate în aceeaşi termeni.

O problemă a apărut încă de la începutul secolul al XX-lea în orizontul cercetărilor privind fenomenul paradoxurilor: *de vreme ce contradicția este numitorul comun al tuturor paradoxurilor*, *nu cumva aceste paradoxuri sunt manifestarea unei structuri comune*, *a unui invariant pe care fiecare paradox să îl realizeze în felul lui*?

S-au dat şi câteva explicații de acest fel. La începutul deceniului 3 al secolului trecut, H. Behmann atrăgea atenția asupra rolului jucat în paradoxuri de definițiile abreviative (o specie a definițiilor nominale din logică) şi de condiția pascaliană a eliminării *definiendum*-ului prin *definiens*. În paradoxul lui Russell, de pildă, unde avem de-a face cu o asemenea abreviere, regula eliminării nu se poate aplica fără contradicție, de unde concluzia că semnele abreviative sunt permise doar acolo unde înlocuirea lor poate fi făcută fără probleme (respectarea regulii = evitarea paradoxului). Şi tot o explicație de acest fel întâlnim la Ch. Perelman pentru care schema comună a paradoxurilor (invariantul) este dată de formula

$$(1) \qquad (\forall x)\ [\sim xRx \equiv xRa\ ],$$

Pentru cazul particular $x = a$, aceasta duce la contradicție, deci va trebui eliminat $a$ din domeniul lui $x$. Aşa stând lucrurile, schema (1) este înlocuită cu o schemă limitativă, ceva de genul: *pentru orice x*, *mai puțin a*, *~xRx dacă şi numai dacă xRa*:

$$(2) \qquad (\forall x/a)\ [\sim xRx \equiv xRa]$$

Paradoxul s-ar datora aşadar unei generalizări excesive (vezi eroarea generalizării pripite din logică), însă, la Perelman, ca şi la Behmann, se produce un soi de cerc vicios – trebuie produsă mai întâi contradicția şi abia după aceea inventate regulile de evitare a ei.

În zilele noastre, o redeşteptare a interesului pentru identificarea unei structuri comune în funcționarea paradoxurilor au produs-o aplicațiile logice ale argumentului (sau raționamentului) diagonal. Cel puțin aceasta este opinia lui Keith Simmons care vede în metoda raționamentului diagonal nu doar posibilitatea reformulării unora dintre paradoxurile clasice, ci şi posibilitatea obținerii de noi rezultate, inaccesibile prin alte mijloace (Simons, K., 1993). Paradoxul mincinosului, de exemplu, reformulat prin metoda raționamentului diagonal permite observații inedite privind universalitatea limbajului, definiția adevărului la Tarski, prima teoremă a lui Gödel de incompletitudine, teoria funcţiilor recursive ş. a. La fel în cazul celorlalte paradoxuri (văzut prin prisma raţionamentului diagonal, paradoxul lui Greling este un caz particular al paradoxului lui Russell).

Lucrarea de faţă îşi propune să prezinte câteva dintre aceste probleme. Voi încerca să arăt cum pot fi expuse unele dintre paradoxurile clasice prin metoda diagonalelor şi ce consecinţe decurg de aici pentru înţelegerea lor. Nu vor fi omise nici celelalte teme circumscrise subiectului – teorema punctului fix, paradoxul validităţii (reluat în contextul diagonalizării), consecinţele acestuia asupra ideii de demonstrabilitate, corelaţiile cu paradoxul lui Curry şi cu paradoxul lui Löb, critica de pe poziţiile intuiţionismului matematic ş. a. Din câte cunosc, aceste lucruri nu au mai fost discutate până acum în literatura românească de specialitate.

## 2. CE ESTE RAŢIONAMENTUL (ARGUMENTUL) DIAGONAL?

Este raţionamentul prin care Georg Cantor demonstra nenumărabilitatea mulţimii numerelor reale. Încă din secolul al XVI-lea, Galilei observase că mulţimea numerelor pătrate poate fi pusă în corespondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor naturale, iar Leibniz făcea o observaţie similară relativ la mulţimea numerelor pare. Sunt încălcale prin aceste corespondenţe câteva din principiile de fier ale logicii clasice, în primul rând logica relaţiei parte–întreg. Pe de o parte, mulţimea numerelor pătrate este inclusă în mulţimea numerelor naturale, deci este o parte simplă a ei, iar pe de altă parte, cele două mulţimi sunt în corespondenţă biunivocă, deci sunt egale numeric. De unde concluzia că în logica mulţimilor infinite partea este egală cu întregul.

Despre numărabilitatea, respectiv nenumărabilitatea unei mulţimi, am vorbit cu altă ocazie, aici mă rezum la a reaminti câteva lucruri de bază [7].

După St. C. Kleene, o mulţime $M$ este *numărabilă* (sau *enumerabilă*) dacă elementele ei pot fi puse în corespondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor naturale $N$. Cu alte cuvinte, $M$ este numărabilă dacă permite o înşiruire (listare) a elementelor ei, astfel ca: *a*) fiecare element din mulţime să ocupe un anumit loc în listă, *b*) acest loc să poată fi asociat unui număr natural $n$ din ordinea crescătoare a numerelor, *c*) între două locuri consecutive să nu existe alte elemente.

Una şi aceeaşi mulţime poate fi dată prin mai multe liste (înşiruiri), cu precizarea că nu orice astfel de înşiruire este neapărat o enumerare. Mulţimea numerelor naturale, de exemplu, poate fi dată printr-o listă care să cuprindă întâi numerele pare şi apoi pe cele impare[8]:

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots., 1, 3, 5, 7, 9, \ldots.$$

[7] I. Lucica, *Concepte şi metode matematice în logică*, p. 200 şi urm.
[8] Exemplu prelucrat după G. Boolos şi J. Jefrey, *Computability and Logic* , p. 1–10.

dar este aceasta o enumerare? Deşi completă – orice element din *N* se regăseşte în listă, şi invers – elementele ei nu au poziţii determinate numeric, cum prevede condiţia *b*) din definiţia numărabilităţii, deci lista nu poate fi considerată o enumerare corectă. Numărul 1, de pildă, ar avea poziţia $\infty + 1$, numărul 3 ar avea poziţia $\infty + 2$ şi aşa mai departe, niciuna dintre poziţiile astfel indicate nefiind un număr natural. Deci, enumeararea exemplificată nu satisface condiţia impusă prin definiţie numărabilităţii.

În limbaj matematic, numărabilitatea unei mulţimi poate fi exprimată foarte simplu cu ajutorul funcţiilor. Funcţia $f: M \rightarrow N$, de exemplu, determină o enumerare a mulţimii *M* dacă pentru orice $a \in M$ există un element unic $f(a) \in N$, şi invers (nu există niciun element din *N* care să nu fie imaginea unui element unic din *M*). În felul acesta, orice pereche $\langle a, f(a)\rangle$ din extensiunea funcţiei *f* asociază un element unic din *M* cu numărul lui de ordine din *N*, şi invers. Dacă există cel puţin un element *x* din *M* care să se sustragă corespondenţei (enumerării) făcută prin *f*, atunci *M* este nenumărabilă.

Care mulţimi sunt numărabile, care sunt nenumărabile şi de ce?

Sunt numărabile în primul rând mulţimile finite (se include aici şi mulţimea vidă). Mulţimile infinite pot fi de asemenea numărabile cu condiţia să respecte condiţiile numărabilităţii. Mulţimea numerelor raţionale, de exemplu, este o mulţime infinit numărabilă, ea include şi mulţimea numerelor întregi (orice număr întreg este număr raţional, nu şi invers). Pentru exemplificare, mă voi referi doar la mulţimea numerelor raţionale pozitive pe care le construim cu ajutorul următorului tabel:

| | 1, | 2, | 3, | 4, | .... |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **1/1**, | 1/2, | 1/3, | 1/4, | ... |
| 2 | 2/1, | **2/2**, | 2/3, | 2/4, | ... |
| 3 | 3/1, | 3/2, | **3/3**, | 3/4, | ... |
| 4 | 4/1, | 4/2, | 4/3, | **4/4**, | ... |
| ......... | ........................................ | | | | |

Tab. 1.

Numerele întregi apar pe diagonala tabelului, ele sunt cazuri particulare de numere raţionale. Făcând simplificările şi eliminând termenii redundanţi, obţinem în final lista

$$1, 2, 1/2, 1/3, 3, 4, 3/2, 2/3, \dots .$$

în care: *a*) se regăsesc toate numerele raţionale, *b*) fiecare număr raţional are o poziţie unică, numeric determinată, *c*) între două poziţii consecutive nu există alte numere. Prin urmare, mulţimea numerelor raţionale este o mulţime infinit numărabilă

Cu totul altfel stau lucrurile în cazul mulţimii numerelor reale. Ne limităm la numerele reale din intervalul [0, 1] care îl au pe 0 ca parte întreagă urmat de o dezvoltare zecimală infinită. Construim pentru enumerarea acestei mulţimi un tabel asemănător celui de mai sus (tabelul 2). Literele *v*, *f* din tabel sunt prescurtări pentru *adevăr* şi *fals*, ele au rolul de a indica faptul că un număr natural *n* este (sau nu este) a *n*-a zecimală a numărului real $R_n$. De exemplu, numărului real $R_4$ îi corespunde succesiunea *f*, *f*, *v*, *v*, ..., prin urmare, în dezvoltarea zecimală a lui $R_4$ numărul 3 apare în a treia poziţie, iar numărul 4 în a patra poziţie, în timp ce 1 şi 2 nu apar în prima, respectiv a doua poziţie, locul lor fiind marcat în succesiunea lui $R_4$ cu *f*. În felul acesta, fiecare număr real $R_n$ din intervalul [0, 1] are asociată o succesiune unică de *v* şi *f*.

| | 1, | 2, | 3, | 4, | .... |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | ***v***, | *f*, | *f*, | *v*, | ... |
| $R_2$ | *f*, | ***v***, | *f*, | *f*, | ... |
| $R_3$ | *v*, | *v*, | ***f***, | *v*, | ... |
| $R_4$ | *f*, | *f*, | *v*, | ***v***, | ... |
| ......... | ............................................ | | | | |

Tab. 2

Dacă tabelul 2 nu ar conţine şi alte numere, mulţimea numerelor reale din intervalul [0, 1] ar fi o mulţime infinit numărabilă, la fel ca mulţimea numerelor raţionale, însă tabelul ne ajută să observăm şi altceva. Pe diagonala tabelului apare succesiunea *v*, *v*, *f*, *v*, ... , care, conform ipotezei, ar trebui să corespundă şi ea unui număr real. Întâmplător, diagonala corespunde numărului real $R_3$. Negaţia diagonalei dă însă şi ea o succesiune, este succesiunea *f*, *f*, *v*, *f* ..., iar întrebarea care se pune acum este ce număr defineşte această nouă succesiune şi cui aparţine el?

Fie $R^*$ acest număr. Conform ipotezei de construcţie, $R^*$ diferă în prima sa zecimală de $R_1$, în a doua zecimală de $R_2$, în a treia de $R_3$, şi aşa mai departe, $R^*$ diferă de fiecare număr din tabel prin cel puţin o zecimală. Deci, $R^*$ nu poate aparţine enumerării. Dacă am forţa totuşi lucrurile şi l-am adăuga listei, s-ar obţine o altă enumerare, şi deci un alt tabel, care şi el ar avea o diagonală, şi deci un număr care să se sustragă noii enumerări, şi tot aşa, la infinit. Prin urmare, nu unul, ci o infinitate de numere pot fi obţinute în acest fel, de unde rezultă că mulţimea numerelor reale din intervalul [0, 1] nu este numărabilă, infinitatea ei diferă de infinitatea numerelor naturale (*densitatea* lor nu este aceeaşi).

Metoda lui Cantor se aplică astăzi în diverse forme – unii preferă să vorbească despre clasa (eventual *familia*) argumentelor diagonale – toate având la bază aceeaşi idee a diagonalizării.

În cartea sa *Introduction to Metamatematics* (1971), Kleene demonstrează nenumărabilitatea funcţiilor aritmetice de un argument cu ajutorul unui tabel din categoria celor invocate, urmând o logică ce aminteşte de metoda raţionamentului prin reducere la absurd. Tabelul 3 pune în corespondenţă mulţimea funcţiilor aritmetice de un argument (dispusă pe verticală), cu mulţimea numerelor naturale (dispusă pe orizontală):

| | 0, | 1, | 2, | 3, | .... |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_0(x)$ | $\mathbf{f_0(0)}$, | $f_0(1)$, | $f_0(2)$, | $f_0(3)$, | ... |
| $f_1(x)$ | $f_1(0)$, | $\mathbf{f_1(1)}$, | $f_1(2)$, | $f_0(3)$, | ... |
| $f_2(x)$ | $f_2(0)$, | $f_2(1)$, | $\mathbf{f_2(2)}$, | $f_0(3)$, | ... |
| $f_3(x)$ | $f_3(0)$, | $f_3(1)$, | $f_3(2)$, | $\mathbf{f_0(3)}$, | ... |
| ......... | ........................................... | | | | |

Tab. 3

Valorile acestor funcţii pentru valorile 0,1, 2, 3, ... ale argumentului $x$ apar în tabel la intersecţia dintre linia funcţiei şi linia argumentului. De exemplu, pentru valoarea 4 a argumentului $x$, funcţia $f_2(x)$ are valoarea $f_2(4)$. La fel pentru celelalte funcţii.

Diagonala tabelului indică funcţia $f_x(x)$, care pentru valorile 0, 1, 2, ... ale argumentului $x$ ia valorile: $f_0(0)$, $f_1(1)$, $f_2(2)$ etc. Mai departe, cu ajutorul funcţiei $f_x(x)$ se defineşte funcţia:

(1) $$f(x) = fx\ (x) + 1,$$

care, dacă ar aparţine tabelului, ar trebui să aibă şi ea un număr de ordine, să zicem $k$. S-ar obţine deci funcţia $f_k(x)$ definită prin

(2) $$f_k(x) = f_x(x) + 1.$$

Dar pentru că $x$ şi $k$ au fost alese la întâmplare, Kleene ia cazul particular $k = x$, ceea ce dă funcţia:

(3) $$f_x(x) = f_x(x) + 1,$$

însă acesta contravine principiului identităţii. Deci, funcţia $f_k(x)$ nu poate face parte din enumerare, deci mulţimea funcţiilor aritmetice de un argument nu este o mulţime infinit numărabilă.

### 3. PARADOXURI ŞI DIAGONALIZARE

Metoda raţionamentului diagonal s-a dovedit utilă în studiul paradoxurilor. Nu este vorba de simple reformulări, acestea, într-adevăr, nu ar prezenta un interes prea mare, ci de fapte şi rezultate noi, inaccesibile prin alte metode. Încă din *Principles of Mathematics*, Russell atrăgea atenţia asupra argumentului diagonal prin întrebarea: *când argumentul produce teoreme şi când produce el paradoxuri*? După ştiinţa mea, nici astăzi întrebarea lui Russell nu are un răspuns satisfătător.

#### 3.1. PARADOXUL LUI RICHARD

Este cel mai reprezentativ paradox al definibilităţii finite. Există în momentul de faţă mai multe variante ale paradoxului, diferite de formularea originală dată de J. Richard în 1903, însă aici nu ne preocupă istoricul problemei, aşa voi alege una dintre variantele cele mai simple ale paradoxului.

Fie Γ mulţimea numerelor finit definibile din intervalul [0, 1] şi $N_1$, $N_2$, $N_3$, ... numerele acestei mulţimi scrise în formă zecimală (o definiţie este finită dacă în componenţa ei intră numai succesiuni finite de litere, simboluri, termeni etc.). Fiecare număr $N_i$ are ca parte întreagă pe 0, urmat de o dezvoltare zecimală infinită. În continuare se construieşte numărul *R* care îl are pe 0 ca parte întreagă, dar care diferă de fiecare număr $N_i$ din Γ prin zecimala cu numărul de ordine *i*. Numărul *R* diferă de $N_1$ prin prima sa zecimală, de $N_2$ prin a doua zecimală, de $N_2$ prin a doua zecimală şi aşa mai departe, *R* diferă de fiecare număr din Γ printr-o zecimală corespunzătoare poziţiei acelui număr în Γ. Ceea ce înseamnă că *R* nu poate face parte din Γ. Pe de altă parte, *R* dispune de o definiţie finită şi deci ar trebui să facă parte din Γ, acesta fiind paradoxul.

Diagonalizarea paradoxului poate viza numerele richardiene propriu-zise sau numai definiţiile acestora. Să luăm primul caz. Presupunând că mulţimea numerelor richardiene din intervalul [0, 1] ar fi infinit numărabilă, fiecare număr din Γ ar avea o dezvoltare zecimală infinită. Notăm cu $Z_{ji}$ zecimala cu numărul de ordine *i* a numărului richardian $N_j$ şi facem enumerarea tuturor zecimalelor numerelor richardiene conform următorului tabel:

| | 1, | 2, | 3, | 4, | .... |
|---|---|---|---|---|---|
| $N_1$ | $\boldsymbol{Z_{11}}$, | $Z_{12}$, | $Z_{13}$, | $Z_{14}$, | ... |
| $N_2$ | $Z_{21}$, | $\boldsymbol{Z_{22}}$, | $Z_{23}$, | $Z_{24}$, | ... |
| $N_3$ | $Z_{31}$, | $Z_{32}$, | $\boldsymbol{Z_{33}}$, | $Z_{34}$, | ... |
| $N_4$ | $Z_{41}$, | $Z_{42}$, | $Z_{43}$, | $\boldsymbol{Z_{44}}$, | ... |
| ......... | .......................................... | | | | |

Tab. 4

În tabelul 4, $Z_{11}$ este prima zecimală a numărului $N_1$; $Z_{34}$ este a patra zecimală a numărului $N_3$; $Z_{53}$ este a treia zecimală a numărului $N_5$ etc. Şi pentru că diagonala indică zecimala $Z_{nn}$, adică zecimala cu numărul de ordine *n* a numărului $N_n$, formăm în continuare zecimala $Z_{nn} + 1$ corespunzătoare unui număr richardian pe care îl notăm $R_j$. Aşa cum am mai spus, $R_j$ nu poate aparţine mulţimii Γ întrucât diferă de fiecare număr al acesteia, dar, pentru că are o definiţie finită, el trebuie să aparţină.

Ce se întâmplă dacă în locul numerelor richardiene luăm definiţiile lor?

În esenţă, raţionamentul este acelaşi. Notăm definiţiile richardiene cu $Def_0$, $Def_1$, $Def_2$ etc. Dacă o definiţie $Def_i$ se aplică unui număr $N_t$, vom scrie $Def_i(N_t)$, iar dacă nu se aplică, vom scrie *non-*$Def_i(N_t)$. Enumerarea definiţiilor dă o listă similară tabelelor construite până acum:

$$\boldsymbol{Def_1\ (N_1)},\ Def_1\ (N_2),\ Def_1\ (N_3),\ ...$$
$$Def_2\ (N_1),\ \boldsymbol{Def_2\ (N_2)},\ Def_2\ (N_3),\ ...$$
$$Def_3\ (N_1),\ Def_3\ (N_2),\ \boldsymbol{Def_3\ (N_3)},\ ...$$

....................................................

Diagonala indică aplicaţia $Def_n(N_n)$ care generează aceeaşi întrebare: putem găsi un număr $N_k$ astfel ca *non-*$Def_k$ $(N_k)$? Dacă da, atunci *non-*$Def_k$ $(N_k)$, fiind tot o definiţie richardiană, va trebui să corespundă unui număr richardian, să zicem $N_i$:

(4) $$Def_i\ (\mathrm{N}_k) = non\text{-}Def_k\ (\mathrm{N}_k)$$

Pentru cazul particular $i = k$, relaţia (4) dă contradicţia

(5) $$Def_k\ (\mathrm{N}_k) = non\text{-}Def_k\ (\mathrm{N}_k).$$

Paradoxul lui Richard poate fi corelat cu conceptul de *adevăr* (la Tarski) şi cu conceptul de *demonstrabil* (la Gödel). Aplicaţiile conceptului de *demonstrabil* au fost iniţiate de Finsler şi au avut drept scop construirea de propoziţii indecidabile (Finsler l-a precedat pe Gödel, utilizând o formă a paradoxului lui Richard, însă, în loc să folosească, la fel ca Richard, noţiunea de *definiţie*, el foloseşte, cum va face mai târziu Gödel, noţiunea de *derivare*).

### 3.2. PARADOXUL MINCINOSULUI

O reformulare a paradoxului mincinosului prin metoda diagonalizării poate fi obţinută după cum urmează. Enumerăm printr-un tabel din categoria celor examinate propoziţiile unui limbaj *L*, precum şi predicatele de propoziţii din *L*. Este vorba de predicate propoziţionale, cum ar fi: *propoziţie adevărată*, *propoziţie atomară*, *propoziţie formată din trei cuvinte* etc. De exemplu, $P_i$ poate fi propoziţia „Zăpada este albă” şi $\Phi_j$ predicatul *propoziţie formată din trei cuvinte*. Simbolul „$\Phi_j(P_i)$” va însemna: „Zăpada este albă” *este propoziţie formată din trei cuvinte*. Se înţelege că unele dintre propoziţiile obţinute în acest fel vor fi adevărate, altele false, însă, pentru moment, nu ne interesează valoarea de adevăr a acestor propoziţii, ci doar enumerarea lor:

| | $P_0$, | $P_1$, | $P_2$, | $P_3$, | .... |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi_0$ | $\mathbf{\Phi_0P_0}$, | $\Phi_0P_1$, | $\Phi_0P_2$, | $\Phi_0P_3$, | ... |
| $\Phi_1$ | $\Phi_1P_0$, | $\mathbf{\Phi_1P_1}$, | $\Phi_1P_2$, | $\Phi_1P_3$, | ... |
| $\Phi_2$ | $\Phi_2P_0$, | $\Phi_2P_1$, | $\mathbf{\Phi_2P_2}$, | $\Phi_0P_3$, | ... |
| $\Phi_3$ | $\Phi_3P_0$, | $\Phi_3P_1$, | $\Phi_3P_2$, | $\mathbf{\Phi_3P_3}$, | ... |
| ......... | ............................................ | | | | |

Tab. 5

Predicatul *Fals*, fiind tot un predicat propoziţional, va figura şi el în lista $\Phi_0$, $\Phi_1$, $\Phi_2$, ... cu un număr de ordine, să-l notăm cu $m$. Se va obţine în acest fel succesiunea de propoziţii: $\Phi_mP_0$, $\Phi_mP_1$, $\Phi_mP_2$, ... , adică:

$P_0$ este falsă,
$P_1$ este falsă,
$P_2$ este falsă etc.

Propoziţia „$P_m$ este falsă”, simbolizată cu $\Phi_m P_m$, aparţine succesiunii (este chiar diagonala tabelului), deci va avea şi ea un număr de ordine. Notăm cu *i* acest număr şi formăm identitatea

$$P_i = Fals\ (P_m),$$

care, pentru cazul particular $i = n$, dă propoziţia $P_i = Fals\ (P_i)$. Însă aceasta este chiar paradoxul mincinosului (propoziţia $P_i$ enunţă propria sa falsitate).

### 3.3. DEFINIŢIA ADEVĂRULUI ŞI INCOMPLETITUDINEA EXPRESIVĂ A LIMBAJULUI

Prin negarea diagonalei în tabelul 5 obţinem mulţimea de propoziţii

$$\sim\Phi_0 P_0,\ \sim\Phi_1 P_1,\ \sim\Phi_2 P_2,\ ...$$

corespunzătoare predicatului $\sim\Phi_m$. Propoziţia $\sim\Phi_m P_m$ diferă de fiecare dintre propoziţiile tabelului în maniera deja indicată. Dar, dacă $\Phi_m$ a fost predicatul falsităţii, $\sim\Phi_m$ va fi predicatul adevărului. De unde rezultă că adevărul este un predicat ce nu se regăseşte printre predicatele limbii *L*. Prin urmare, nu putem da o definiţie a adevărului în termenii lui *L*, o asemenea definiţie cere un limbaj de ordin superior, un *metalimbaj* (definiţia tarskiană a adevărului spune acelaşi lucru, dar într-o altă formă).

La Tarski, limbajul natural este *universal* şi *semantic universal* (distincţia îi aparţine lui K. Simmons), el exprimă tot ceea ce poate fi în genere exprimat, chiar şi propria lui semantică. Or, din câte s-a văzut, raţionamentul diagonal demonstrează contrariul – limbajul natural nu este nici universal, nici semantic universal.

Faptul că limbajul natural nu poate exprima orice concept apare la K. Simmons ca un tip aparte de incompletitudine pentru care foloseşte expresia de *incompletitudine expresivă* a limbajului[9]. Simplu spus, relativ la un limbaj *L*, va exista întotdeauna un concept *x* care nu poate fi exprimat prin mijloacele de expresie din *L*. Or, prin metoda raţionamentului diagonal s-a demonstrat că un astfel de concept este chiar conceptul de adevăr.

Însă nu doar conceptul de adevăr şi paradoxul mincinosului atestă incompletitudinea expresivă a limbajului, aceeaşi incompletitudine poate fi demonstrată şi în general, independent de un concept anume. Voi reproduce în acest scop un rezultat pe care l-am obţinut în legătură cu definiţia logică a conceptului, rezultat care pune în evidenţă incompletitudinea expresivă a limbajului într-un mod mult mai simplu şi mai direct.

Dat fiind că orice concept se exprimă în limbaj printr-un termen sau combinaţie de mai mulţi termeni, notăm cu $C_1$, $C_2$, $C_3$, ... conceptele şi cu $T_1$, $T_2$, $T_3$, ...

[9] K. Simmons, *The Universality and the Liar. An Essay on the Truth and the Diagonal Argument*, p. 15 şi urm.

termenii prin care se exprimă aceste concepte într-un limbaj $L$ (sau într-o clasă $L$ de limbaje).[10] Mai departe, dispunem cele două mulţimi conform cu metoda diagonalizării:

| | $T_0$, | $T_1$, | $T_2$, | $T_3$, | .... |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_0$ | ***v***, | *f*, | *v*, | *v*, | ... |
| $C_1$ | *f*, | ***f***, | *v*, | *f*, | ... |
| $C_2$ | *f*, | *v*, | ***v***, | *v*, | ... |
| $C_3$ | *v*, | *f*, | *v*, | ***f***, | ... |
| ......... | ........................................... | | | | |

Tab. 6

Succesiunea de *v* şi *f* din dreptul fiecărui concept are rolul de a indica termenii prin care se exprimă acesta. Dacă la intersecţia lui $C_i$ cu $T_j$ se află *v*, înseamnă că $C_i$ se exprimă prin $T_j$, iar dacă se află *f*, înseamnă că $C_i$ nu se exprimă prin $T_j$. De pildă, lui $C_0$ îi corespunde succesiunea *v f v v* ... , deci $C_0$ se exprimă prin $T_0$, $T_2$, $T_3$, .... . În schimb, $C_2$ se exprimă prin $T_1$, $T_2$, $T_3$, .... pentru că lui $C_2$ îi corespunde succesiunea *f v v v* ... .

Pe diagonala tabelului se formează succesiunea *v f v f* ..., care şi ea caracterizează un anumit concept (este chiar conceptul $C_3$ din enumerarea noastră). Însă, pentru scopul urmărit aici, importantă este negaţia diagonalei, respectiv *f v f v*... . Întrebarea este ce concept caracterizează această nouă succesiune?

Dacă notăm cu $C^*$ presupusul concept, vom observa imediat că $C^*$ diferă în prima sa poziţie de $C_0$, în a doua poziţie de $C_1$, în a treia poziţie de $C_2$, şi aşa mai departe, $C^*$ diferă de fiecare dintre conceptele enumerării noastre. Aceasta este tot una cu a spune că există cel puţin un concept neexprimabil în $L$, un concept care, ieşind din enumerare, nu se exprimă prin niciunul dintre termenii lui $L$. Prin urmare, limbajul $L$ este *conceptual* (sau *expresiv*) *incomplet*.

## 4. TEOREMA PUNCTULUI FIX

Revin la tabelul 3 pentru o altă observaţie. În tabel sunt listate numai funcţiile numerice de un argument printre care figurează şi funcţia constantă $f(x) = x$. Fiind tot o funcţie numerică de un argument, funcţia $f(x)$ va avea şi ea un număr de ordine, să zicem $m$, deci $f(x) = f_m(x)$. Pentru valoarea $x_m$ a argumentului $x$, aceasta va da funcţia diagonală

(1) $$f_m(x_m) = x_m$$

[10] Pentru detalii, vezi I. Lucica, *Schiţa unei teorii logice a conceptului* (I) în „Probleme de logică" vol. XIII, p. 41–60.

Între $f_m(x_m)$ şi $x_m$ este acelaşi raport ca între $P_n$ şi $Fals(P_n)$ din diagonalizarea mincinosului. Generalizat, acest raport se exprimă prin aşa numita

***Teoremă a punctului fix***: Dacă $\Phi(x)$ este o formulă din limbajul unei teorii T în care $x$ este singura variabilă liberă, atunci există o propoziţie $H$ în limbajul lui T, astfel că $\vdash_T H \equiv \Phi(H^*)$[11].

Despre propoziţia $H$ spunem că este punctul fix al formulei $\Phi(x)$, tot aşa cum $x_m$ este *punctul fix* al funcţiei $f_m(x)$. Pentru că această funcţie aparţine diagonalei $\Delta$, raportat la enumerarea $E$ putem aserta relaţia

(2) $$f_m(x_m) \in \Delta(E).$$

Teorema punctului fix şi teorema diagonalizării înseamnă, practic, acelaşi lucru. Observaţia nu este lipsită de importanţă dacă ne gândim că cele mai multe dintre paradoxurile examinate sunt consecinţa directă a teoremei punctului fix. În paradoxul mincinosului, cum s-a văzut, propoziţia $P$ este un astfel de punct fix pentru $Fals(x)$. La fel în paradoxul lui Russell, unde $Imp$ este punctul fix pentru $Imp(x)$.

Interesantă este aplicarea teoremei punctului fix în studiul implicaţiilor. Dacă notăm cu $B(x)$ implicaţia $x \to Q$ şi cu $P$ punctul ei fix, se ajunge la $P \equiv B(P)$, respectiv, $P \equiv P \to Q$.

Echivalenţa $P \equiv P \to Q$ se obţine în acelaşi mod. Fie $\Gamma = \{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$ mulţimea propoziţiilor unui limbaj $L$ din care fac parte şi propoziţiile implicative $P_i \to P_k$. Dispunem aceste implicaţii conform metodei diagonalizării:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{P_0 \to P_0},\ P_0 \to P_1,\ P_0 \to P_2,\ P_0 \to P_3,\ \ldots. \\ P_1 \to P_0,\ \boldsymbol{P_1 \to P_1},\ P_1 \to P_2,\ P_1 \to P_3,\ \ldots \\ P_2 \to P_0,\ P_2 \to P_1,\ \boldsymbol{P_2 \to P_2},\ P_2 \to P_3,\ \ldots \end{array}$$

Fie acum $P_m \to P_n$ o implicaţie oarecare din tabel. Fiind o propoziţie din $\Gamma$, va avea şi ea un număr de ordine, să zicem $r$. Deci $P_r \equiv P_m \to P_n$. Mai departe, ne interesează implicaţiile dintre $P_r$ şi $P_m$, respectiv, $P_m \to P_r$ şi $P_r \to P_m$. Prin tranzitivitate, ele dau implicaţia diagonală $P_n \to P_n$. Înlocuim în cele două implicaţii pe $P_r$ cu echivalenta ei $P_m \to P_n$ şi obţinem: $P_m \to (P_m \to P_n)$, respectiv, $(P_m \to P_n) \to P_m$. Aceasta este o implicaţie reciprocă, deci poate fi reformulată prin echivalenţa:

(3) $$P_m \equiv (P_m \to P_n)$$

Aşa cum am spus, propoziţia $P_m$ este punctul fix al implicaţiei $x \to P_n$, deci şi enumerarea implicaţiilor permite o diagonalizare corespunzătoare.

[11] Cu $H^*$ este numărul gödelian al propoziţiei $H$, noţiune ce va fi introdusă ceva mai departe.

## 5. DACĂ 2 + 2 = 4, ACEASTĂ IMPLICAŢIE ESTE FALSĂ

Propoziţia (3) din paragraful anterior este o implicaţie autoreferenţială, la fel ca implicaţia din titlul prezentului paragraf. Aceste propoziţii dau posibilitatea corelării într-o manieră inedită a paradoxurilor implicaţiei materiale cu paradoxul mincinosului. Să urmăm procedurile obişnuite şi să presupunem că propoziţia din titlu ar fi adevărată. Fiind vorba de o implicaţie cu antecedent adevărat, consecventul ei va trebui să fie la fel de adevărat. Dar consecventul spune că implicaţia este falsă şi, dacă spune adevărul, implicaţia este falsă. Iar dacă este falsă (a doua presupunere), având în vedere că antecedentul ei este adevărat, consecventul ar trebui să fie fals. Însă consecventul spune chiar acest lucru, că implicaţia este falsă şi, dacă este fals, urmează că implicaţia este adevărată. Ca şi în paradoxurile clasice, din supoziţia de adevăr urmează falsul şi din supoziţia de fals, adevărul. Să mai notăm că prin contrapoziţia implicaţiei se ajunge tot o propoziţie paradoxală:

(J) *Dacă această implicaţie este adevărată*, *atunci* $2 + 2 \neq 4$.

Din supoziţia de adevăr, având în vedere falsul consecventului, urmează falsul antecedentului, deci este fals că „această implicaţie este adevărată”, deci „această implicaţie este falsă”. Şi dacă „această implicaţie este falsă”, întrucât consecventul ei este fals, antecedentul trebuie să fie adevărat, deci „această implicaţie este adevărată”.

Ce fel de paradoxuri sunt acestea? Sunt ele variante ale paradoxului mincinosului dat fiind că propoziţiile în cauză fac aserţiuni despre propria lor valoare de adevăr? Sau sunt paradoxuri implicative, având în vedere că uzează de cazurile de adevăr/fals ale implicaţiei?

După părerea mea, sunt paradoxuri combinate sau *paradoxuri de trecere*, dacă mi se permite formularea, ele întrunesc condiţiile ambelor paradoxuri. Interesant este că şi aceste paradoxuri îşi au istoria lor, după cum voi încerca să arăt în cele ce urmează.

### 5.1. PARADOXUL VALIDITĂŢII (PSEUDO-SCOTUS)

În manualele de logică, un raţionament deductiv este apreciat ca valid dacă premisele lui nu pot fi adevărate şi concluzia falsă. Când raţionamentul este valid şi premisele lui adevărate, cu necesitate logică şi concluzia raţionamentului va fi adevărată. Pseudo Scotus (logician englez din secolul XIV) a formulat împotriva definiţiei validităţii următorul argument:

(D) *Deus est*, *igitur non valet consequentia*
(Dumnezeu există, deci nu decurge această consecinţă).

Asemănarea cu paradoxurile examinate mai sus este evidentă. Din supoziţia de validitate, dat fiind că raţionamentul are o singură premisă şi aceasta este adevărată (chiar necesar adevărată), concluzia va trebui să fie şi ea adevărată. Dar concluzia spune că raţionamentul este nevalid (numai când este nevalid nu decurge concluzia), prin urmare, dacă raţionamentul este valid, el este nevalid. Iar dacă este nevalid, fiind vorba de un raţionament deductiv, înseamnă că premisa lui este adevărată şi concluzia falsă. Concluzia nu decurge în mod valid din premisă. Dar concluzia lui tocmai acest lucru spune, că nu decurge în mod valid din premisă şi atunci concluzia lui este adevărată. Fiind un raţionament cu premisă adevărată şi concluzie adevărată, el este valid. Exact ca în celelalte paradoxuri, din supoziţia de validitate urmează nevaliditatea, iar din supoziţia de nevalidate, validitatea.

Raţionamentului (D) îi corespunde implicaţia autoreferenţială

(K) *Dacă Dumnezeu există*, *nu are loc această consecinţă* (sau *această implicaţie*),

care nu diferă esenţial de implicaţia din titlu. Or, tocmai această autoreferenţialitate este cea care a dat posibilitatea reformulării paradoxului prin metoda argumentului diagonal şi a teoremei punctului fix (vom vedea ceva mai târziu că atât în paradoxul lui Curry, cât şi în paradoxul lui Löb, intervine implicaţia $U \equiv U \to B$, respectiv $U \equiv U \to f$, care traduc în limbaj simbolic propoziţiile examinate).

Să revenim la paradoxul validităţii. De vreme ce fiecare paradox semnalează ceva, o problemă anume, ne putem întreba ce probleme semnalează acesta? Este afectat conceptul de validitate aşa cum este afectat prin paradoxul mincinosului conceptul de adevăr? Şi cum trebuie corectat conceptul de validitate pentru a ieşi de sub incidenţa paradoxului?

Nu există un acord astăzi în privinţa răspunsurilor. Autori precum H. Field (2008), L. Shapiro (2012), Beall & Murzi (2013) ş.a. pun conceptul de validitate la rând cu conceptele de *adevăr*, *cunoaştere*, *mulţime* etc., în opinia lor aceste concepte se cer corectate ca efect al paradoxurilor. În schimb, J. Ketland (2012), R. T. Cook (2013) ş.a. nu recunosc autenticitatea paradoxului, pentru ei aceste păreri sunt pur şi simplu greşite. Este invocat în discuţii caracterul formal al conceptului de validitate. Pe scurt, $B$ se deduce în mod valid din $A$ dacă raţionamentul $A \mid\!- B$ provine dintr-o formă logic validă de raţionament. Aceste forme inferenţiale valide sunt caracterizate de regula substituţiei:

(RS) Dacă $A$ şi $B$ sunt două expresii care îl conţin pe $X$ şi dacă $Y$ este de acelaşi tip cu $X$, atunci, dacă $A \mid\!- B$ este o deducţie validă, raţionamentul $A[X/Y] \mid\!- B[X/Y]$ obţinut prin substituţia lui $X$ cu $Y$ în $A$ şi $B$ va fi de asemenea valid.

Respingerea paradoxului validităţii se face în virtutea acestei reguli. Pentru că nu putem indica o formă validă de raţionament din care să rezulte (D), şi nici în (D) nu putem opera substituţii prin care să ajungem la o formă validă, raţionamentul (D) nu este un raţionament autentic şi, în consecinţă, nici paradoxul validităţii un paradox autentic.

Cu aceasta s-ar zice că problema a fost rezolvată, însă lucrurile nu s-au oprit aici. Actualele discuţii pe tema paradoxului validităţii au ca punct de plecare nu formulări de genul celor examinate până acum, ci un presupus predicat al validităţii, care, adăugat axiomelor unei teorii formale, duce la contradicţii. După Roy T. Cook (2013), de exemplu, o astfel de contradicţie rezultă când adăugăm axiomelor lui Peano regulile de introducere şi eliminare ale predicatului *Val*($x$,$y$) (citeşte: *y se deduce valid din x*):

(RI). Oricare ar fi expresiile $A$ şi $B$ ale unui limbaj formalizat $L$, dacă $A \mid\!- B$, atunci

$$\varnothing \mid\!- Val\,(A^{*}, B^{*})$$[12]

(RE). Pentru oricare două expresii $A$ şi $B$ din $L$:

$$\varnothing \mid\!- Val\,(A^{*}, B^{*}) \to (A \to B).$$

Adăugate axiomelor lui Peano (PA), cele două reguli dau o deducţie de tipul

(PA) $\qquad$ (PA), $\Sigma \mid\!- \perp$

în care $\perp$ este semnul contradicţiei, iar $\Sigma$ este echivalenţa obţinută prin teorema punctului fix, respectiv:

($\Sigma$) $\qquad$ $\Sigma \equiv Val\,(\Sigma^{*}, \perp)$.

Se demonstrează în acest fel inconsistenţa aritmeticii lui Peano, care, în opinia autorului, este altceva decât paradoxul validităţii. Însă demonstraţia uzează de predicatul validităţii, deci o legătură cu paradoxul totuşi există.

## 5.2. PARADOXUL LUI CURRY

Logica modernă a reeditat paradoxul validităţii în două variante – prin paradoxul lui Curry şi prin paradoxul lui Löb. Diferite ca intenţie şi ca formă de exprimare, cele două paradoxuri s-au dovedit a avea totuşi multe lucruri comune.

În ce priveşte paradoxul lui Curry, acesta are legături cu paradoxul mincinosului, cu paradoxul lui Russell şi cu paradoxul lui Richard, fără a putea fi redus totuşi la vreunul dintre ele. A fost construit de matematicianul american Haskell Curry în două etape. Prima etapă, dată de studiul său *The Paradox of Kleene and Rosser* (*JSL*, 1941), are ca scop simplificarea paradoxului construit de Kleene şi Rosser în 1935 relativ la calculul λ-conversiunii şi la un sistem de logică combinatorică creat tot de H. B. Curry, în 1934. Rezultatul lui Kleene şi Rosser, apreciază Curry, este comparabil ca importanţă cu teoremele de incompletitudine ale lui Löwenheim, Skolem şi Gödel, însă, din cauza dimensiunii şi a complexităţii lui, paradoxul risca să nu-şi atingă ţinta. Se cerea deci o simplificare a paradoxului, ceea ce Curry a şi făcut în studiul menţionat.

[12] $A^{*}$ şi $B^{*}$ sunt numerele gödeliene ale propoziţiilor $A$ şi $B$. Espresia *Val* ($A^{*}$, $B^{*}$) se va citi: propoziţia cu numărul gödelian $B^{*}$ este consecinţa validă a propoziţiei cu numărul gödelian $A^{*}$.

Un an mai târziu (a doua etapă), Curry publică articolul *The Inconsistency of Certain Formal Logic* (*JSL*, 1942), în care produce o simplificare şi mai drastică a paradoxului. Pentru că argumentul prezentat aici este inedit, el nu mai circulă astăzi sub numele de „paradoxul lui Kleene şi Rosser”, ci sub numele de „paradoxul lui Curry”.

> Obiectivul studiului, spune Curry, este să arate că dacă folosim un alt paradox va rezulta o inconsistenţă printr-un argument mult mai simplu şi o ipoteză mai puţin restrictivă. Contradicţia nu mai poate fi numită „paradoxul lui Kleene şi Rosser” din cauza faptului că se bazează pe un principiu complet diferit[13].

Demonstraţia lui Curry porneşte de la un sistem formal S, combinatorial complet[14], dotat cu o implicaţie $\supset$, astfel că, dacă pentru doi termeni arbitrari $M$, $N$ au loc implicaţiile I – III de mai jos, atunci orice termen din S este o aserţiune (sau formulă demonstrabilă):

I. $|\!- M \supset M$,
II. $|\!- M \supset . M \supset N. \rightarrow . |\!- M \supset N$,
III. $|\!- M \;\&\; |\!- M \supset N. \rightarrow . |\!- N$.

Practic, ceea ce demonstrează Curry cu ajutorul schemelor I – III este inconsistenţa sistemului S. Condiţia este ca pentru orice termen $B$ să existe în S un termen $U$, astfel ca între $U$ şi $B$ să aibă loc relaţia ($U$): $U = U \supset B$ (vezi teorema punctului fix aplicată implicaţiei $x \supset B$). Presupunând că respectiva relaţie (sau condiţie) se respectă, $B$ poate fi dedus în S fără dificultate:

(1) $U \supset U$ [din I],
(2) $U \supset (U \supset B)$ [ din ($U$), prin simplificare ],
(3) $U \supset B$ [din 2, II şi III],
(4) $U$ [din 3, ($U$) şi III],
(5) $B$ [din 3, 4 şi III ].

Relaţia $U = U \supset B$ este, din câte vedem, cheia întregii probleme. O vom numi *relaţia* (U), respectiv *condiţia* (U), în funcţie de cum ne vom referi la ea. În sistemul S, unde are loc demonstraţia, relaţia (U) este o identitate între doi termeni, spre deosebire de sistemele de logică propoziţională unde relaţia este o echivalenţă între două propoziţii. Interpretarea propoziţională a relaţiei (U) dă un caz special de autoreferenţialitate:

(*k*) *Dacă această implicaţie este adevărată*, *atunci este adevărată şi o propoziţie oarecare B*.

[13] H. B. Curry, *The Inconsistency of Certain Formal Logic*, în „The Journal of Symbolic Logic”, vol. 7, no. 3 (sept. 1942), p. 115.

[14] Completitudinea combinatorică a sistemului se referă la capacitatea lui de expresie, deci este altceva decât completitudinea deductivă.

Având în vedere că $B$ poate fi şi o propoziţie falsă, relaţia (U) s-ar putea reda la fel de bine prin (U'): $U \equiv U \supset f$. De aici legătura cu paradoxul validitităţii. De exemplu, propoziţia

(*i*) *Dacă această implicaţie este adevărată*, *atunci* $2 + 2 \neq 4$,

examinată în legătură cu paradoxul validităţii, este un caz particular al schemei (U') şi implicit al schemei (U).

Două aspecte sunt menţionate în legătură cu paradoxul lui Curry – pozitivitatea lui (faptul că poate fi construit fără negaţie) şi sfera lui de cuprindere. Aceasta cuprinde teoriile aşa-zis intuitive, cum este teoria intuitivă a adevărului, teoria intuitivă a mulţimilor, teoria intuitivă a combinatorilor ş.a. Le voi prezenta succint în cele ce urmează.

### 5.3. PARADOXUL LUI CURRY ŞI SCHEMA NERESTRICŢIONATĂ A ADEVĂRULUI LA TARSKI

Schema adevărului la Tarski – [*A*] *este propoziţie adevărată dacă şi numai dacă A* – o vom exprima simbolic prin:

(T) $\mathrm{T}[A] \equiv A$

unde cu [*A*] am notat numele propoziţiei *A*. La schema (T) se adaugă schema implicativă

(P) $(A \,\&\, (A \supset B)) \rightarrow B$

cunoscută sub numele de *aserţiune* sau de *pseudo modus ponens*. Mai departe, din (U') şi din (T), prin substituţie de echivalente, se obţine:

(D) $\mathrm{T}(U') \equiv \mathrm{T}[U'] \supset f.$

Cele trei scheme sunt suficiente pentru derivarea constantei *f*, după cum se vede şi din secvenţa de mai jos:

| | |
|---|---|
| 1. $U \equiv U \supset f$ | [schema (U')] |
| 2. $(U \,\&\, (U \supset f)) \supset f$ | [(P) aplicată la U şi *f*] |
| 3. $(U \,\&\, U) \supset f$ | [din (2), prin substituţiea lui $U \supset f$ cu U] |
| 4. $U \supset f$ | [din (3), prin simplificare] |
| 5. $U$ | [din (1) şi (4), prin *modus ponens*] |
| 6. $f$ | [din (4) şi (5) prin *mod. ponens*] |

### 5.4. PARADOXUL LUI CURRY ŞI AXIOMA COMPREHENSIUNII

Ceva similar se întâmplă în teoria mulţimilor relativ la axioma comprehensiunii (sau *abstracţiei*). Potrivit axiomei, orice predicat $F$ determină o clasă $M = \{x \colon F(x)\}$, astfel că între $x \in M$ şi $F(x)$ are loc relaţia:

(C) $(x).\ x \in M \equiv F(x)$

Îl înlocuim în (C) pe $F$ cu schema $x \in x \rightarrow f$ pentru a defini mulţimea:

(M) $$M = \{x \colon x \in x \rightarrow f\}.$$

Din această definiţie şi din axioma (C) se obţine relaţia:

(D) $$(M \in M) \equiv (M \in M \rightarrow f)$$

Deducţia lui $f$ se face din (C) şi din (D) în aceeaşi manieră:

| | |
|---|---|
| 1. $M \in M \rightarrow M \in M \rightarrow f$ | [din (D), prin simplificare] |
| 2. $M \in M \rightarrow f$ | [din 1, prin contracţie] |
| 3. $M \in M$ | [din 2 şi din (D), prin *MP*] |
| 4. $f$ | [din 2 şi 3, prin *MP*] |

Cititorul a observat, probabil, că schema (D) nu este altceva decât schema (U') când locul lui $U$ este luat de $M \in M$. Prin urmare, şi axioma comprehensiunii, aplicată schemei (U'), dă aceeaşi inconsistenţă $f$.

### 5.5. PARADOXUL LUI CURRY ŞI TEORIA INTUITIVĂ A COMBINATORILOR

Condiţia (U) este satisfăcută şi în logica combinatorică, deci şi aici este posibilă o deducţie de tip $f$. Introducem pentru început definiţiile combinatorilor $\Im$ şi $\Upsilon$, precum şi regulile de reducţie asociate lor:

$$(\Re)\ \frac{\Re = \lambda x.\, x \rightarrow B}{\Re x = x \rightarrow B}, \qquad (\Upsilon)\ \frac{\Upsilon = \lambda y.\, \Re\,(yy)}{\Upsilon y = \Re\,(yy)}$$

Cu ajutorul acestor reguli se poate demonstra simplu că relaţia (U) corespunde în sistem combinaţiei $\Upsilon\Upsilon$:

| | |
|---|---|
| $U = \Upsilon\Upsilon$ | [Definiţie] |
| $= \Re(\Upsilon\,\Upsilon)$ | [Din definiţie şi din $(\Upsilon)$] |
| $= \Re(U)$ | [Din definiţie şi din $(\Re)$] |
| $= U \rightarrow B$ | [Din $(\Re)$ aplicat lui $U$] |
| $\therefore U = U \rightarrow B$ | |

Dacă în definiţia $(\Re)$ îl înlocuim pe $B$ cu $f$, obţinem schema (U') (las cititorului ca exerciţiu reformularea raţionamentului).

Paradoxul lui Curry nu este propriu-zis un paradox, ci o demonstraţie de inconsistenţă care se foloseşte de un paradox. Curry invocă paradoxul mincinosului, paradoxul lui Richard şi paradoxul lui Russell, toate trei având o strânsă legătură cu schemele (U) şi (U'). Dacă vom compara, de pildă, schema (D) din paradoxul lui Curry cu paradoxul lui Russell, vom observa o simetrie perfectă între $(M \in M) \rightarrow f$ şi $\sim(M \in M)$. De aici ideea că paradoxul lui Curry ar fi paradoxul lui Russell fără negaţie. Diferenţele se datorează schemelor de deducţie folosite. Dacă la Russell apar scheme specifice negaţiei, la Curry apar cele două scheme (U) şi (U') care nu presupun negaţia.

Schema (U) $U \equiv U \supset B$, după cum am mai spus, provine din teorema punctului fix aplicată implicaţiei x $\supset B$. Schema (U') $U \equiv U \supset f$ este schema (U) în care locul lui $B$ a fost luat de o propoziţie falsă oarecare, notată cu $f$. Însă aceeaşi schemă (U') poate fi privită şi ca o reformulare a paradoxului mincinosului: *propoziţia U exprimă propria sa falsitate*. Simbolic, aceasta s-ar putea reda prin $U \equiv (U \equiv f)$ sau prin $U \equiv (U \supset B)$. Important este că niciuna dintre scheme nu este o expresie logic validă, ceea ce ne aduce încă o dată în faţa întrebării: este raţionamentul lui Curry realmente un paradox?

Având în vedere că (U) şi (U') sunt obţinute în sistemele respective prin procedee valide (vezi paragraful anterior), argumentul trece drept paradox (o specie aparte de paradox al autoreferenţialităţii), însă chiar şi în aceste condiţii îndoiala se menţine.

Privită din perspectiva logicii propoziţiilor, relaţia $U \equiv U \supset f$ nu este altceva decât contradicţia $U \equiv \sim U$, în care $\sim U$ a fost înlocuită cu echivalenta ei $U \supset f$ (în sistemul lui A. Churh, de exemplu, axioma $(P \supset f) \supset f$ este proprietatea dublei negaţii). Ceea ce înseamnă că paradoxul porneşte de la o inconsistenţă pentru a ajunge la o altă inconsistenţă, singura diferenţă fiind aceea că una dintre inconsistenţe este admisă (fiind obţinută prin procedeul diagonalizării), iar cealaltă respinsă. Or, normal ar fi fost ca odată cu respingerea uneia, să se respingă şi cealaltă (în aceste condiţii, nici observaţia privind forma pozitivă a paradoxului nu se mai susţine).

## 6. PARADOXUL LUI LÖB

Matematicianul englez de origine germană Martin Löb a demonstrat, în 1955, teorema care astăzi îi poartă numele, o teoremă prin care se arată că dacă $A$ şi $B$ sunt expresii închise din limbajul unui sistem S de aritmetică recursivă şi dacă $Bew(x)$ este predicatul demonstrabilităţii în S, atunci,

(1) Dacă $\vdash_S Bew\,(B^*) \rightarrow B$, atunci $\vdash_S B$.

Teorema dă o soluţie pozitivă problemei lui Leon Henkin (1952) privind demonstrabilitatea în sistemul aritmetic vizat a unei propoziţii ce exprimă propria sa demonstrabilitate. Spre deosebire de propoziţia gödeliană

(2) $G \equiv \neg Bew(G^*)$,

care, deşi adevărată, este indecidabilă în sistem (nici ea, nici negaţia ei nu pot fi demonstrate), propoziţia

(3) $H \equiv Bew(H^*)$,

cunoscută şi ca *propoziţie a lui Henkin*, este demonstrabilă în S. Aspectul paradoxal al propoziţiei $H$ va fi discutat ceva mai departe, deocamdată sunt necesare câteva precizări cu privire la noţiunile şi simbolurile folosite în demonstraţie. Cu mici excepţii, ele sunt aceleaşi cu conceptele şi simbolurile din demonstraţia teoremelor gödeliene. Simbolul „S” desemnează, după cum am mai spus, aritmetica lui Peano, un sistem consistent de aritmetică recursivă ce conţine schema inducţiei matematice. Limbajul lui S, notat cu $L_S$, este limbajul logicii predicatelor la care se adaugă constantele 0 (zero) şi $s$ (succesor), relaţia „=”, precum şi operaţiile aritmetice „+” şi „×”.

Pe lângă axiomele proprii, S conţine şi câteva axiome logice, iar ca reguli de deducţie, regula generalizării şi *modus ponens* (faptul că o propoziţie $B$ se deduce ca teoremă în S se notează, ca şi până acum, cu „$\vdash_S B$”).

Relativ la S se introduce predicatul demonstrabilităţii „$Bew(x)$”. Contrar aşteptărilor, acesta nu se aplică expresiilor, ci numerelor gödeliene ale expresiilor. Conform aritmetizării gödeliene, expresiile şi demonstraţiile din $L_S$ sunt asociate, după un algoritm anume conceput, cu numere prime, astfel că fiecare expresie şi fiecare succesiune finită de expresii din $L_S$ îşi va avea propriul său număr.

Convenim să notăm cu $A^*$ numărul gödelian al expresiei $A$. Valorile lui $x$ din „$Bew\ (x)$” nu vor fi expresiile pur şi simplu, ci numerele gödeliene ale expresiilor (putem considera numărul $A^*$ drept numele (gödelian) al expresiei $A$).

Predicatul „$Bew\ (x)$” poate fi parafrazat cu ajutorul relaţiei de demonstraţie „$D(x, y)$”. Vom spune aşadar despre $x^*$ că este numărul gödelian al unei expresii demonstrabile în S dacă şi numai dacă există în S un număr gödelian $v^*$, corespunzător demonstraţiei pentru expresia cu numărul gödelian $x^*$ din S:

(4) $$Bew(x^*) =_{df} (\exists v^*)\ D(v^*, x^*)$$

Normal ar fi fost ca între predicatul „$Bew\ (x)$” şi semnul asertării „$\vdash_S$” să existe o concordanţă, o identitate chiar, însă o asemenea identitate nu poate avea loc din simplul motiv că sfera lui „$Bew\ (x)$” este mult mai mare. Practic, orice predicat din S care satisface axiomele I–III de mai jos este un predicat al demonstrabilităţii:

I. Dacă $\vdash_S A$, atunci $\vdash_S Bew\ (A^*)$,
II. Dacă $\vdash_S Bew\ (A^* \rightarrow B^*)$, atunci $\vdash_S Bew\ (A^*) \rightarrow \vdash_S Bew\ (A^*)$
III. Dacă $\vdash_S Bew\ (A^*)$, atunci $\vdash_S Bew\ Bew\ (A^*)$,

Cele trei axiome au fost introduse de M. Löb după cartea lui Hilbert şi Bernays, *Grundaglen der Mathematik*, vol II, şi sunt sunt cunoscute astăzi sub denumirea de „condiţiile (sau axiomele) Hilbert-Bernays-Löb”. Împreună cu propoziţia

(H) $$\vdash_S H \equiv Bew\ (H^*) \rightarrow B,$$

obținută din $Bew\ (x) \to B$ prin teorema punctului fix, și cu $\vdash_S Bew\ (B^*) \to B$ (ipoteza teoremei), axiomele I–III sunt suficiente pentru deducția propoziției $B$[15]. Deducția are loc după cum urmează:

| | |
|---|---|
| (1) $\vdash_S H \equiv Bew\ (H^*) \to B$ | Prop. (H) |
| (2) $\vdash_S H \to [Bew\ (H^*) \to B]$ | Din (1) |
| (3) $\vdash_S Bew\ \{ H \to [Bew\ (H^*) \to B]\}$ | Din (2) și I |
| (4) $\vdash_S Bew\ \{H \to [(Bew\ (H^*) \to B]\} \to$ $\to \{Bew\ (H^*) \to Bew\ [Bew\ (H^*) \to B]\}$ | Din (3) și II |
| (5) $\vdash_S Bew\ (H^*) \to Bew\ [Bew\ (H^*) \to B]$ | Din (3) și (4) |
| (6) $\vdash_S \{Bew\ [Bew\ (H^*) \to B)] \to$ $\to [Bew\ Bew\ (H^*) \to Bew\ (B^*)]$ | Din (5) și II |
| (7) $\vdash_S Bew\ (H^*) \to [Bew\ Bew\ (H^*) \to Bew\ (B^*)]$ | Din (5) și (6) |
| (8) $\vdash_S Bew\ (H^*) \to [BewBew\ (H^*)]$ | Din III |
| (9) $\vdash_S Bew\ (H^*) \to Bew\ (B^*)$ | Din (7) și (8) |
| (10) $\vdash_S Bew\ (B^*) \to B$ | Ipoteză |
| (11) $\vdash_S Bew\ (H^*) \to B$ | Din (9) și (10) |
| (12) $\vdash_S H$ | Din (1) și (11) |
| (13) $\vdash_S Bew\ (H^*)$ | Din (12) și I |
| (14) $\vdash_S B$ | Din (11) și (13) |

S-a demonstrat astfel că în sistemul de aritmetică S, din ipoteza $\vdash_S Bew\ (B^*) \to B$, prin axiomele I–III și prin teorema punctului fix, se deduce propoziția $B$. Dar pentru că din (14) și din I se obține $\vdash_S Bew\ (B^*)$, o putem aserta în continuare pe $\vdash_S B \to Bew\ (B^*)$. Coroborat cu (10), aceasta dă propoziția lui Henkin $B \equiv Bew(B^*)$. Prin urmare, orice propoziție din S care afirmă propria sa demonstrabilitate este demonstrabilă în S.

Cu aceasta, consider teorema lui Löb suficient precizată. În continuare, voi face un scurt comentariu asupra aspectului de paradox al teoremei lui Löb.

Ca și paradoxul lui Curry, paradoxul lui Löb este o variantă a paradoxului validității, cu diferența că în paradoxul lui Löb intervine schema adevărului la Tarski, în timp ce paradoxul lui Curry uzează de principiul (sau axioma) comprehensiunii din teoria mulțimilor.

Fie *B* propoziția „dacă *B* este adevărată, atunci $2 + 2 \neq 4$ (a se revedea paradoxul validității). Mai departe, procedăm în maniera teoremei lui Löb:

| | |
|---|---|
| (1) *B* este adevărată, | Supoziție. |
| (2) „Dacă *B* este adevărată, atunci $2 + 2 \neq 4$” este adevărată, | Din (1) și din *B*. |
| (3) Dacă *B* este adevărată, atunci $2 + 2 \neq 4$, | Din (2). |

[15] Demonstrația este reformulată după G. Boolos, *Logic of Provability* (1993, p. 54), G. Boolos și R. Jefrey, *Computability and Logic* (1992, p. 183–88) și E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic* (2001, p. 213–14).

| | |
|---|---|
| (4) $2 + 2 \neq 4$, | Din (1) şi din (3). |
| (5) Dacă *B* este adevărată, atunci $2 + 2 \neq 4$, | Din (1) şi din (4). |
| (6) „Dacă *B* este adevărată, atunci $2 + 2 \neq 4$" este adevărată, | Din (5), |
| (7) *B* este adevărată, | Din (6) şi din *B*. |
| (8) $2 + 2 \neq 4$, | Din (5) şi (7). |

Paradoxul, ca şi teorema lui Löb, readuce în discuţie problema raportului dintre adevăr şi demonstrabilitate. Într-un sistem formal de complexitatea celui invocat va exista întotdeauna o diferenţă între ceea ce se demonstrează efectiv şi ceea ce se spune în sistem că se demonstrează. Prin teorema lui Gödel luăm act de limitele demonstrabilităţii sistemului, iar prin teorema lui Löb de limitele exprimabilităţii lui.

Propoziţia gödeliană $\vdash_S G \equiv \neg Bew(G^*)$ o indică pe $G$ drept punctul fix al expresiei $\neg Bew(x)$. Indecidabilitatea lui $G$, relativ la S, poate fi pusă în evidenţă cu ajutorul axiomei I. Raţionamentul este următorul: din ipoteza $\vdash_S G$ şi din $\vdash_S G \equiv \neg Bew(G^*)$ rezultă $\vdash_S \neg Bew(G^*)$. Însă din aceeaşi ipoteză şi din axioma I rezultă $\vdash_S Bew(G^*)$. Prin urmare, ipoteza $\vdash_S G$ este contradictorie, deci *non*-$\vdash_S G$. Rezultă de aici că este fals $Bew(G^*)$. Dar ipoteza $\vdash_S \neg G$, întrucât $\vdash_S G \equiv \neg Bew(G^*)$, duce la demonstrabilitatea propoziţiei false $Bew(G^*)$. Pentru că nu are loc nici $\vdash_S G$, nici $\vdash_S \neg G$, propoziţia $G$ este indecidabilă. Prin urmare, dacă S este consistent, atunci niciun punct fix al expresiei $\neg Bew(x)$ nu este demonstrabil în S, şi dacă S este ω-consistent, niciun punct fix pentru $\neg Bew(x)$ nu este indemonstrabil. Însă punctul fix al expresiei $\neg Bew(x)$ există, deci vom putea aserta prima teoremă de incompletitudine pentru S: *dacă* S *este* ω-*consistent*, S *este incomplet*.

## 7. CÂTEVA CONSIDERAŢII FINALE

Argumentul diagonal este astăzi locul comun al discuţiilor logico-filosofice despre infinit şi despre dihotomiile lui specifice. Prin teorema punctului fix, argumentul a câştigat foarte mult teren în matematică, depăşind cu mult sfera problemelor pentru care a fost conceput. Un masiv tratat de matematică (690 pagini) apărut recent la Springer, avându-i ca autori pe Andrej Granas şi James Dugundji, *Fixed Point Theory* (2003), încearcă o unificare a aplicaţiilor teoremei şi implicit a argumentului, într-un fel de *matematică* a *punctului fix*. Ideea de *punct fix*, definită de cei doi autori în introducerea lucrării, aminteşte oarecum de funcţia diagonală (1) din capitolul 4 al prezentei lucrări: dacă $X$ este un spaţiu (Hausdorf) oarecare şi $f$ o aplicaţie a lui $X$ (sau a unei submulţimi a lui $X$) în $X$, atunci un punct $x \in X$ este numit *punct fix* pentru $f$ dacă $x = f(x)$. Mulţimea tuturor punctelor fixe pentru o funcţie dată $f$ este notată cu $Fix(f)$. Mai departe, cu ajutorul noţiunii de *punct fix* se introduce noțiunea de *spațiu al punctului fix* (*fixed point space*): un spațiu $X$ în care orice aplicație $f$: $X \rightarrow X$ admite un punct fix este un *spațiu al punctului fix*.

Aplicațiile logice ale argumentului diagonal vizează, cu precădere, problema paradoxurilor. Gödel a fost, dacă nu primul, în orice caz printre primii care au văzut în paradoxul lui Richard o aplicație a metodei diagonalelor. Ulterior, metoda aproape că s-a generalizat. Şi aici teorema punctului fix a deschis perspective noi de aplicare. În plus, s-au reactivat teme logice de mult uitate, cum ar fi paradoxul validității, de exemplu, reeditat prin paradoxul lui Curry, prin paradoxul lui Löb şi prin alte rezultate de vârf ale logicii matematice. Ele au dat un nou conținut ideilor formale de adevăr, demonstrabilitate şi exprimabilitate.

Filosofia argumentului diagonal înregistrează, şi ea, câteva probleme noi. Cele vechi se refereau la ipoteza continuului (restrânsă şi generalizată) şi la conceptul de infinit, iar cele noi se referă la formele de raționalitate şi de inferențialitate logică impuse de matematica modernă. Argumentul diagonal este, într-adevăr, o formă nouă de argument, necunoscută logicii clasice, însă *ingredientele* lui – legea terțului exclus, legea dublei negații, raționamentul prin reducere la absurd ş.a. – sunt cunoscute logicii încă din Antichitate. Ce este nou atunci şi ce este vechi în metoda raționamentului diagonal?

O obiecție de fond împotriva raționamentului a ridicat logica (şi matematica) intuiționistă. În capitolul 2 s-a arătat, cu ajutorul tabelului 1, că mulțimea numerelor reale din intervalul [0, 1] conține nu unul, ci o infinitate de numere reale ce se sustrag corespondenței cu mulțimea numerelor naturale, de unde ideea a cel puțin două tipuri de infinit. Rezultatul părea, într-adevăr, spectaculos, el a realimentat speculațiile filosofice pe tema infinitului, însă, au spus intuiționiştii, atâta timp cât argumentul indică fără a construi el nu poate trece drept o metodă valabilă de demonstrare în matematică. S-a ajuns astfel ca o problemă filosofică – clasica problemă a existenței – să despartă apele într-o ştiință atât de riguroasă cum este matematica. Valabil în matematica actualistă, pentru care este suficientă condiția slabă a existenței (necontadicția), argumentul diagonal este mai puțin valabil, sau chiar nevalabil, în matematica intuiționistă unde funcționează criteriul efectivității. Teza pluralismului logic a punctat din nou, chiar şi în această formă indirectă. Pe de altă parte, problemele în discuție au arătat clar că matematica, logica şi filosofia, domenii cândva atât de îndepărtate, au devenit astăzi de nedespărțit.

**8. BIBLIOGRAFIE**

Barwise, J., Etchemendy, J., *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, Oxford University Press, New Zork, Oxford, 1987.

Blackburn, S., *Oxford dicționar de filosofie* (trad. C. Iricinski, L. S. Kertesz, L. Torres, M. Czobor), Editura Univers Enciclopedic, Bucureşti, 1999.

Boolos, G., Jefrey, R. C., *Computability and Logic* (third edition), Cambridge University Press, Cambridge 1992.
Boolos, G., *Logic of Provability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
Clark, M., *Paradoxes From A to Z* (second edition), Routledge, London and New York, 2007.
Cook, R. T., *Paradoxes*, Polity Press (Key Concepts in Philosophy Series), Cambridge, 2013.
Cook, R. T., *There is no Paradox of Validity*, www.uni-log. org/contest 2013/cook1.pdf
Curry, H. B., *Fundamentele logicii matematice*, în vol. *Logică şi Filozofie* (coord. M. Târnoveanu şi Gh. Enescu), Editura Politică, Bucureşti 1966, p. 197–227.
Curry, H. B., *The Paradox of Kleene and Rosser*, Transactions of The American Mathematical Society, vol. 50, no. 3 (Nov., 1941), pp. 451–516.
Curry, H. B.,*The Inconsistency of Certain Formal Logics*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 7, no. 3 (Sep. 1942), pp. 115–117.
Enescu, Gh., *Teoria sistemelor logice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1976.
Enescu, Gh., Târnoveanu, M., *Logică şi Filozofie*, Editura Politică, Bucureşti, 1966.
Flew, A., *Dicţionar de filosofie şi logică* (trad. D. Stoianovici), Editura Humanitas, Bucureşti, 1999.
Gödel, K., *On Formally Undecidable Propositions of Principia Math. and Related Systems* I, în J. von Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel*, Harvard, 1967.
Granas, A., Dugundji, J., *Fixed Point Theory*, Springher-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Milan, Paris, Tokyo, Hon Kong, 2003.
Jacquette, D., *The Validity Paradox in* $S_5$, Synthese109, 47–62, 1996.
Jc Beall & Julien Murzi, *Two Flavors of Curry's Paradox*, Universities of Connecticut and Otago (jc.beall@uconn.edu) & University of Kent and Munich Center for Mathematical Philosophy, Ludwic-Maximilians Universität (j.murzi@gmail.com).
Kleene, St. C., *Introduction to Metamathematics*, Wolters-Noordhoff Publisshing Gronningen and North-Holland Publishing Company, Amsterdam London, 1971.
Lucica, I., *Concepte şi metode matematice în logică* (ediţia a doua), Editura de Vest, Timişoara, 2009.
Löb, M., *Solution of a Problem of Henkin*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 20. No. 2 (jun. 1955), pp. 115–118.
Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic* (fourth edition), Chapman & Hall/CRC, 1997.
Sainsbury, R. M., *Paradoxes* (second edition), Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
Simons, K., *Universality and the Liar*. *An Essays on Truth and the Diagonal Argument*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.